# 目　录



## 第一章　函　数



## 第二章　数列的极限

## 第三章 函数的极限与连续

## 第四章 导数及微分



## 第五章 中值定理

## 第六章 导数的应用



## 习题答案

# 引　言

科学是实践的产物，因需要而发展．数学的发生与发展主要也是这样．从我国的《九章算术》来看，《方田》是测量土地的经验；《粟米》是从粮食交易中总结出来的．为了计算运输的劳力和费用，才有《均输》；由于考核工程的土方，而有《商功》．这都是由于需要而产生的算法．古代生产水平低，所需要的数学简单；近代生产发达，科学技术进步，数学和其他科学一样，也日趋复杂．回顾以往的数学，大体上可以说，十七世纪以前，停留在常量的数学．自从法国人笛卡儿提出坐标以后，才逐渐研究变化的现象，可以说是运动的数学．中学里的代数和几何，都属于常量的数学．比如几何里讲全等三角形时，三角形是固定的，不能在同一个问题的讨论中，先后形状不同．代数里解方程时，尽管方程改变，而我们所追求的目标，即方程的根，却是不变的．这就是常量的数学，也就是初等数学的特点．

常量的数学，只能处理静止的问题．社会实践发展到一定阶段，常量的数学就不够用了，于是运动的数学应运而生，微积分就是处理运动现象的重要数学学科．它是十七世纪末期英国人牛顿与德国人莱布尼兹同时独立发现的．微积分是微分法与积分法的简称．在整个数学体系中，微分法与积分法是互相对立的两种计算方法，犹如加法与减法，乘法与除法，是一对矛盾的两个对立面，而微积分便是它们的统一体．这两个对立面又有共同之点，这就是：两者在用数来处理现实世界

的运动现象时，都是将讨论的对象分成极其细微的小部分，这种极微小的部分，叫做无穷小量．因此微积分又叫做无穷小分析，或数学分析．

牛顿探讨过曲线 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 之下($a>0$)，$x$ 轴之上与直线 $x=x_1$ 之间的面积．现在用这问题的一个特例，说明一下微积分算法的大意．这里必须再提醒一下：微积分是运动的数学，它在变化之中处理数量之间的关系，在变化之下解决实际问题．假设位于曲线 $y=x^2$(图 0-1)之下，$x$ 轴之上，$x=x_1$($x_1>0$)之左的平面区域是 $D$．直观上很容易承认 $D$ 有面积，把这面积记作 $A$．从运动的观点来看，可以认为 $D$ 是由移动的纵坐标 $AP$ 当它的横坐标 $x$ 由 $O$ 变到 $x_1$ 时生成的．在这看法之下，有一种矛盾关系：直线没有宽度，不占有面积，但是由于它移动却能生成面积，这面积是由动直线 $x=x'$ 的无穷多位置拼成的．如果每条直线绝对地没有面积，便无论如何也不能拼成面积．只要承认运动的直线是面积的元素，就必需赋予它极其微小的宽度．在现在的问题中，带有微小宽度的纵坐标即是面积的元素，在微分学里称为面积的微分，求微分的算法便是微分法．

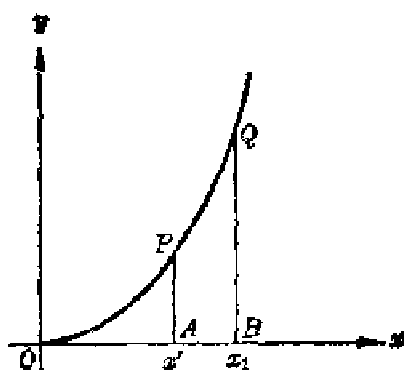


图 0-1

如何求 $A$ 的微分？这需要从 $A$ 说起．打算求 $A$ 在 $x=x'$ 时的微分，要先求 $x=x'$ 与 $x=x'+h$ 之间的面积或者它的近似值

$$H=\frac{1}{2}[x'^2+(x'+h)^2]h=x'^2h+\left(x'h^2+\frac{1}{2}h^3\right).\quad(0.1)$$

$A$ 的微分是极其微小的面积，所以应该是 $h$ 趋于零时 $H$ 的数值．$h$ 趋于零绝不是 $h$ 等于零，$h$ 逐渐变小时，$H$ 也随着变化，(0.1)式右端最后圆括弧里的数，相对地说尤其小．略去这个括弧里的数，用剩下的 $x'^2h$（这是个变动着的数）作为 $x=x'$ 时的面积元素，并且说

$A$ 在 $x=x'$ 处的微分是 $x'^2h$.

这里趋于零的 $h$ 象征着面积元素的宽度，$x'^2$ 是它的高．

如何按积分求 $A$？通过 $x$ 轴上 $O$ 与 $x_1$ 之间的一串点画纵坐标，从而把 $D$ 分成许多长条，为简单起见，不妨认为这些长条一样宽．把这些长条的面积近似地算出来．然后令小长条的个数无限增多，使每个小条变成前边所说的微分，求它们的和 $S$．如果 $S$ 趋于一个确定的数值，这数值应该就是 $A$.

牛顿还证明了曲线 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 的纵坐标的大小，就是对应的面积（在这纵坐标处）增加的速度．用上述的特例来说，即是纵坐标由 $O$ 移动到 $x=x'$ 时面积（这时是 $OAP$ 的面积）增加的速度等于纵坐标 $AP$ 的数值 $x'^2$．如果把 (0.1) 式的两端都除以 $h$，那么

$$\frac{H}{h}=x'^2+\left(x'+\frac{1}{2}h\right)h$$

便是面积在 $x=x'$ 与 $x=x'+h$ 之间增加的平均速度（譬如认为 $x$ 是时间）．现在让 $h$ 无限地变小，这平均速度就几乎等于 $x'^2$.

再如以自由落体运动来说，假设 $t$ 是降落的时间，$s$ 是降落的距离，$g$ 是重力加速度．从伽利略运动方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

求很短很短一点点时间内物体下降的距离，或者求某个时刻

的速度，就是微分法．技术上和前面求面积的微分或增加的速度一样．从每个时刻的速度

$$v=gt$$

求一段时间之内降落的距离，就是积分法．这需要把一点点一点点时间之内降落的距离加起来．这里所谓"一点点时间"并不是十分之一秒或百分之一秒，……，而是比任何能够指得出来的短暂时间都要短的时间．所以两种算法都要把给定的一段时间，分了又分，直至无穷多次才能达到目的．可见纯微积分的计算，从理论上说，都是无穷多道手续合成的．这是微积分与初等数学根本不同的地方．

实现无穷多道手续的运算，要借助于极限理论；一次极限运算便是无穷多次代数运算组成的．这是解决微积分问题的必由之路，所以微积分学充满着极限运算，极限理论是微积分的支柱．

微积分在生产实践中有哪些用途呢？方才说微分法可以确定运动物体的速度．且不必说其他方面，仅仅速度的用处就说不完．火车上坡下坡，出站入站，过桥转弯，都要根据不同情况调剂速度，不然就可能发生事故．锻工气锤冲击力量的大小与气锤触及炽铁时的速度有关，同一气锤速度大时冲力就大．要想减弱冲力就要使锤的速度放慢．要想使人造卫星按计划进入预定的轨道，更需要知道它的速度如何变化，以便时时刻刻控制它的运动．总之，微积分对于近代科学以及工程技术的发展，起着不可估量的作用，说它是划时代的科学，毫不过分．现在几乎是一大半高等数学的基础，是一切工程技术学科不可缺少的工具．有了微积分这把钥匙，就可能进而打开物理、力学、电学、电讯等科学的大门；也可以走向函数论、微分方程、概率论和数理统计等数学分支，从而为科学

研究及生产实践服务.

微积分主要是讨论变化现象的，变化现象无时不与动因对应. 而动因或者只有一种，或者不只一种，前者用一元函数表示，后者用多元函数表示. 于是微积分又分为一元函数与多元函数两大部分. 合起来是一个大的整体. 为了自学的方便，我们在编写中把它分成三册，即《一元函数微分学》，《一元函数积分学》和《多元函数微积分》.

# 第一章

# 函　数

微积分要处理现实中的运动现象，就需要有方法用数把所要讨论的现象表示出来．表示变化现象的数学工具就是函数．既然要使用数，就需要了解数的性质．这一章从实数说起，然后用它来讲函数的一般概念和经常使用的初等函数．

## 第一节　实　数

### 1.1　实数系

事物的变化有突变、有渐变．渐变的情况，多半是连续变化的：一棵植物从发芽到成株，它的高度是连续变化的；阳光下的竿影，由长而短，或由短而长，在一段时间内的伸长或缩短，也是连续变化的．如果我们希望知道这些长度，自然要用尺子去量，但是尺子的刻度较之变化中的长度过于稀疏．假如我们把寒暑表的刻度当作尺子，略微加一点温度使水银柱上升，顷刻之间就有无限多个水银柱的长度产生，但不能由它旁边的刻度(尺)读出来．所以用刻度尺去量连续变化的长度是很不够的．测量长度用尺子；表示大小、多少、轻重…用数．刻度尺不能表达变化中的一切长度，那么数就能表示变化中的量吗？微积分要研究变化中的量，就不能不注意数这个问题——要能够应付一切变化中的量．

我们认为实数系是已经知道的结构．虽然实数是量的通性，是从各种量抽象出来的，然而人类对于实数的认识并不是

一次完成的．而是先认识自然数，然后认识分数，再推广到负数，便完成了有理数系．单用整数表示一切量，显然不够．有理数有一个重要性质，即是任何两个有理数 $p$ 与 $q$ 之间，一定还有有理数，$\frac{1}{2}(p+q)$ 就是其中的一个．照这样说，有理数已经稠密，数学里说这是处处稠密，然而有理数还是不够用．请看下面的事实．

用单位长作边画一个正方形．这个正方形的边是线段，对角线也是线段，也应有它的长度 $d$．根据勾股定理，$d^2=2$．现在用反证法，证明没有一个有理数能表示 $d$．假若不然，如果 $p$ 与 $q$ 是没有公因数的正整数，而 $p/q$ 等于 $d$，便应该

$$\frac{p^2}{q^2}=2 \quad 或 \quad p^2=2q^2.$$

右端有因数 2，那么 2 一定能整除 $p$．设 $p=2r$，代入上边的等式，得

$$4r^2=2q^2.$$

所以
$$2r^2=q^2.$$

左端有因数 2，2 应该能整除右端，那么 2 又应该是 $q$ 的因数．这就发生矛盾了——原先假设 $p$ 与 $q$ 没有公因数．这矛盾说明没有有理数可以表示单位正方形的对角线之长．这例子说明只用有理数不能表示现实世界中的一切量的大小．

为了适应象单位正方形对角线之长的一类量的需要，在有理数以外添一个数，用 $\sqrt{2}$ 表示它．这就是一个无理数．应该知道，为了适应需要而添置的无理数很多很多．$\sqrt{2}$ 仅是其中的一个．例如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\pi$，$\sin 1$，…都是无理数．略一推想就能知道无理数比有理数多得多，比如每个有理数加 $\sqrt{2}$，每个有理数乘 $\sqrt{2}$ 都是无理数．怎见得呢？

假若 $r$ 是有理数，而 $r+\sqrt{2}$ 或 $r\sqrt{2}$ 又是有理数，那么有理数 $r+\sqrt{2}$ 减有理数 $r$，或有理数 $r\sqrt{2}$ 除以有理数 $r$，应该都是有理数，然而 $\sqrt{2}$ 是无理数，出现矛盾了.

把无理数纳入数系之后，不仅加、减、乘、除、开方五种运算可以通行无阻，而且可以证明这时的数确实稠密得再没有空隙．根据这点性质我们说实数系是连续的．从使用的观点来说，它可以表示任何大小的量或任何变化中的量了.

## 1.2 数轴、坐标

实数系是有次序的一个集体，就是说随便取两个实数 $a$、$b$，它们在

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

三种关系中一定有一种成立，而且只有一种成立．因为实数有这种性质，才能用它比较量的大小或多少．这种性质又使一切实数排成一个长长的大队．人们为了直观地表示它们，就把实数系的一切数和直线上的一切点等同起来．在一条直线 $x'x$（图 1-1）上，取一点 $O$ 表示实数 0．$O$ 叫做**原点**，它把 $x'x$ 分成两条射线．如果直线是平卧的（直立的），通常用右（上）半线表示正数，叫做**正半线**．左（下）半线表示负数，叫做**负半线**．这就是说给 $x'x$ 规定了**方向**，向左（下）为负，向右（上）为正．$x'$ 标在负半线上，$x$ 标在正半线上，正半线上再画一个箭头表示是正方向．在正半线上取一点 $U$ 表示正数 1，$OU$ 就是**长度单位**．具备了原点、方向和长度单位的直线叫做**数轴**．数轴上的每个点表示一个实数；反过来说，每个实数



图 1-1

一定有数轴上的一个点来表示它．这就是说实数系的一切实数和数轴上的一切点之间有一一对应的关系．

如果 $x'x$ 上的 $A$ 点与实数 $x$ 相对应，便说 $A$ 是 $x$ 的象，$x$ 是 $A$ 的坐标．以有理数为坐标的点叫做**有理点**，以无理数为坐标的点叫做**无理点**．以后讨论问题时，往往把数与点混为一谈，不说 $A$ 点而径直借它的坐标说 $x$ 点，也可能说的是数，而需要理解为它的象．

数轴是实数的直观图形．顺序是实数的重要性质．可以说实数的运算都起源于实数的顺序．今后很多问题的讨论，都要涉及实数的顺序，尤其在不等关系上更是这样．既然一切实数按照由小而大的顺序，从左往右排列在数轴上，实数的顺序便表现为：

> 在 $a$ 左边的点都比 $a$ 小，越是偏左就越小；在 $a$ 右边的点都比 $a$ 大，越是偏右就越大．在原点左侧的点都比 0 小，都是负数；在原点右侧的点都比 0 大，都是正数．

根据以上的描述又可以知道：

> 在数轴上随便取两点(数)，左边的点(数)一定小于右边的点(数)，左边的点(数)减右边的点(数)一定得负数；右边的点(数)一定大于左边的点(数)，右边的点(数)减左边的点(数)，一定得正数．

例如：$-5$ 在 $-2$ 之左，$-5<-2$，$(-5)-(-2)<0$；$-1$ 在 $-4$ 之右，$-1>-4$，$(-1)-(-4)>0$（图 1-2）．

把这些关系概括起来，即是：

> $a$ 在 $b$ 之左，$a<b$，$a-b<0$ 是一回事，只要这三条




图 1-2

之中有一条成立，其余两条一定也成立：$a$ 在 $b$ 之右，$a>b$，$a-b>0$ 也是一回事，只要这三条之中有一条成立，其余两条一定也都成立.

现在介绍一个符号，它可以使许多推理或论述简单明了。例如上边说的

$$\text{如果 } a \text{ 在 } b \text{ 之左，那么 } a<b,$$

我们简写为

$$a \text{ 在 } b \text{ 之左} \Rightarrow a<b.$$

记号"$\Rightarrow$"读作"隐含"．全句的意思是说从"$a$ 在 $b$ 之左"能推得"$a<b$"．写在"$\Rightarrow$"左边的是原因，右边是结果．左边是右边的充分条件，右边是左边的必然条件．如果左右两边可以互推，即是两边互为必然及充分条件时，便用记号"$\Leftrightarrow$"表示．例如："$a$ 在 $b$ 之左"与"$a<b$"可以互推，就记作

$$a \text{ 在 } b \text{ 之左} \Leftrightarrow a<b.$$

采用这种记号时，上边说的一大段话便简化为

$$a \text{ 在 } b \text{ 之左} \Leftrightarrow a<b \Leftrightarrow a-b<0;$$

$$a \text{ 在 } b \text{ 之右} \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow a-b>0.$$

【例 1】 $x$ 是什么数值时 $x^2-5x-6$ 取正值？$x$ 是什么数值时 $x^2-5x-6$ 取负值？

解：因为 $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$，那么

$$x^2-5x-6>0 \Leftrightarrow x+1 \text{ 与 } x-6 \text{ 同号；}$$

$$x^2-5x-6<0 \Leftrightarrow x+1 \text{ 与 } x-6 \text{ 异号。}$$

当 $-1<x<6$ 时

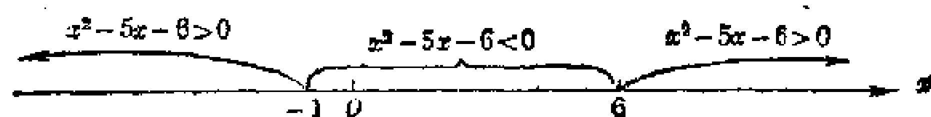



图 1-3

$$\left.\begin{aligned}&x\text{ 在 }-1\text{ 之右}\Rightarrow x+1=x-(-1)>0\\&x\text{ 在 }6\text{ 之左}\Rightarrow x-6<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^2-5x-6<0.$$

当 $x<-1<6$ 时

$$\left.\begin{aligned}&x\text{ 在 }-1\text{ 之左}\Rightarrow x+1=x-(-1)<0\\&x\text{ 在 }6\text{ 之左}\Rightarrow x-6<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^2-5x-6>0.$$

同理，当 $-1<6<x$ 时，$x^2-5x-6>0$.

【例 2】 数轴上的哪些点同时满足不等式 $2x+5>0$ 及 $5x-18<0$?

解：
$$2x+5>0\Leftrightarrow x>-\frac{5}{2},$$

$$5x-18<0\Leftrightarrow x<3\frac{3}{5}.$$

所以
$$-2\frac{1}{2}<x<3\frac{3}{5}.$$

这是数轴上介于 $-2\frac{1}{2}$ 与 $3\frac{3}{5}$ 之间的一切点(图 1-4)。

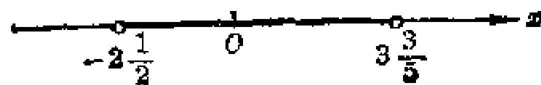



图 1-4

## 1.3 绝对值

**定义 1** 某数 $a$ 的绝对值，在 $a\geqslant 0$ 时指的是 $a$ 本身，在 $a<0$ 时，指的是负 $a$.

例如 5 的绝对值是 5，而 $-5$ 的绝对值则是 $-(-5)=5$. 任何数的绝对值不能是负数，只能是正数或零. $a$ 的绝对值记作 $|a|$. 例如 $|-5|=5$, $|2-5|=|-3|=3$, $\left|\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$.

从几何上来说，$|a|$ 是 $a$ 与原点之间的绝对距离，即是不

带方向的距离. $|x-a|$是 $x$ 与 $a$ 之间的绝对距离. $|x+a|$是 $x$ 与 $-a$ 之间的绝对距离.

【例 1】 $|x-3|$在 $x-3>0$ 时 (即是 $x>3$ 时或 $x$ 在 3 之右时), 是 $x-3$; 在 $x-3<0$ 时(即是 $x<3$ 时, 或 $x$ 在 3 之左时), 是 $3-x$(图 1-5).

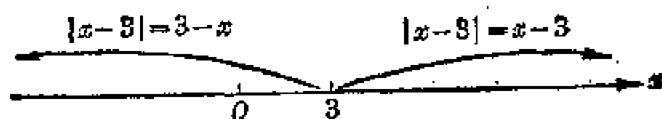



图 1-5

【例 2】 $|x|<3$ 表示 $x\geqslant 0$ 时, $x=|x|<3$; $x<0$ 时, $-x=|x|<3$, 所以 $x>-3$(不等式两端都变号时, 掉转不等的方向). 两方面合起来写, 便是

$$-3<x<3,$$

即图 1-6 所示.




图 1-6

一般来说, 不等式$|x|<a$ 与不等式 $-a<x<a$ 等价, 即两者虽然写的形式不同, 但对于 $x$ 的限制是一样的, $x$ 可以是 $-a$ 与 $a$ 之间的任何数. 不等式

$$|x|\leqslant a \tag{1.1}$$

与不等式

$$-a\leqslant x\leqslant a \tag{1.2}$$

等价, $x$ 不但可以是 $-a$ 与 $a$ 之间的任何数, 还可以是 $-a$ 或 $a$.

【例 3】 $|x|>a(a>0)$表示 $x\geqslant 0$ 时 $x>a$, $x<0$ 时 $-x>a$, 或者说 $x<-a$. 所以$|x|>a$ 包括数轴上 $-a$ 以左与 $a$ 以

右的一切点.

现在把不等式$|x-a|<b$着重说一下. 这不等式是说: 当$x>a$时(即是$x-a>0$时, 或$x$在$a$之右时), $x-a=|x-a|<b$, 或者$x<a+b$; 也就是说, $x$若在$a$之右, 便不能超过$a+b$. 当$x<a$时(即是$x-a<0$时, 或$x$在$a$之左时), $-(x-a)=|x-a|<b$, 或者$x-a>-b$, 或者说$x>a-b$, 也就是说, $x$若在$a$之左, 便不能超过$a-b$. 两种情形合并起来便是

$$a-b<x<a+b.$$

在数轴上这是端点为$a-b$与$a+b$的线段(图 1-7), 长度是$2b$, 中点是$a$.




图 1-7

例如$|x-8|<3$即是$5<x<11$. $|x+8|<3$即是$-11<x<-5$.

从几何上来说, $|x-a|<b$表示$x$与$a$的绝对距离小于$b$. 这就是说$x$可以在$a$左边, 也可以在$a$右边, 但是离开$a$的长度小于$b$.

此外还应该记住$|a|=\sqrt{a^2}$.

从绝对值的定义可以知道, 当$a>0$时

$$-|a|<a=|a|,$$

当$a<0$时, $$-|a|=a<|a|.$$

所以不论$a$是正数或负数, 一定满足不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|. \tag{1.3}$$

**定理 1** 两数之和的绝对值不大于这两数的绝对值之和.

【证】 假设两数是$a$和$b$, $a$满足(1.3); 同理$b$满足

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|. \tag{1.4}$$

把(1.3)，(1.4)两式左右两端分别相加，得

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

这和(1.2)的形式一样，按(1.1)的形式写出来，便是

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|. \tag{1.5}$$

这就是所要证明的. ▌

应当注意，这里的临界等式$|a+b|=|a|+|b|$必须在$a$、$b$同号时才能成立. 这时$a+b$自然也和$a$、$b$同号.

用数学归纳法，不难证明：

**推论** 任意$n$个数之和的绝对值不大于各数的绝对值之和；就是

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

**定理 2** 两数之差的绝对值不小于这两数的绝对值之差.

【证】 假设两数$a$、$b$之差等于$c$：$a-b=c$，于是$a=b+c$. 根据定理1，

$$|a|=|b+c| \leqslant |b|+|c|=|b|+|a-b|,$$

由此

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|. \text{ ▌} \tag{1.6}$$

**注** 实际上(1.6)应该写作

$$|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|. \tag{1.7}$$

这因为$|a|<|b|$时，(1.6)式固然成立，然而$|a|-|b|$既然是负数，这不等式便失去作用了. (1.7)式固然形式上合理，而实用上很不方便. 所以平常在(1.6)与

$$|b-a| \geqslant |b|-|a|$$

之中选一个有效的来用. 其实$a$, $b$两数，本来可正可负，于是$a+b$与$a-b$在这里没有区别的必要，所以有些书中把

(1.5)与(1.7)合并为

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

还应该注意，(1.6)里的临界等式$|a-b|=|a|-|b|$必须在$a$、$b$同号而且$|a|>|b|$时才能成立，这时$a-b$也和$a$、$b$同号.

**定理3** 两数之积的绝对值等于两数的绝对值之积. 即是

$$|ab|=|a||b|. \tag{1.8}$$

【证】 第一，$a$、$b$之中有一个是零时，定理显然成立.

第二，$a$、$b$同号时，$ab>0$，于是$|ab|=ab$；另一方面$|a||b|=ab$，所以$|ab|=|a||b|$.

第三，$a$、$b$异号时，不妨设$a>0$，$b<0$. 这时$ab=-[a(-b)]$，由此$|ab|=a(-b)$. 另一方面$|a|\cdot|b|=a(-b)$. 所以$|ab|=|a||b|$. ▌

用数学归纳法可以证明：

**推论** 任意$n$个数之积的绝对值等于各数的绝对值之积. 即是

$$|a_1\cdot a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$

**定理4** 两数之商的绝对值等于两数的绝对值之商.

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \tag{1.9}$$

这里自然要$b\neq0$. 读者可以仿照定理3，分别情况予以证明.

从定理4知道

$$\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b|}.$$

【例4】 试证不等式

$$\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

【证】 $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$都等于零时，上式两端都是零，因而

相等，合乎定理的要求．如果 $x_1, x_2, y_1, y_2$ 不都是零，那么

$$\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|=\frac{\left|(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$=\frac{\left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$\leqslant\frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|+|y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

但是

$$|x_1|+|x_2|=\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2};$$

$$|y_1|+|y_2|=\sqrt{y_1^2}+\sqrt{y_2^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

从而

$$\frac{|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\leqslant\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\leqslant 1;$$

$$\frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\leqslant\frac{|y_1|+|y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\leqslant 1.$$

所以

$$\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

在估计误差时，经常使用绝对值不等式．在计算结果与理论之间，在度量结果与实物之间都会有误差．所谓甲数对于乙数的误差，一般是说乙数是正确的，甲数是近似的，甲乙两数之差的绝对值就是甲对于乙的误差．估计甲数对于乙数的误差，就是分析两数之差的绝对值 $D$ 最大不超过怎样的一个限度 $E$．普通解决这类问题的方法是把 $D$ 适当地放大，使 $E$ 尽可能地简单．

【例 5】 估计 $\sin(a+h)$ 对于 $\sin a$ 的误差．这里 $h$ 是绝对值很小的数．

解：因为

$$\sin(a+h)-\sin a=2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

而 $\left|\sin\frac{h}{2}\right| \leqslant \left|\frac{h}{2}\right|$ *) $=\frac{1}{2}|h|$; $\left|\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 1$, 所以

$$|\sin(a+h)-\sin a| = 2\left|\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{h}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}|h| = |h|.$$

【例 6】 正方体的棱长是 $a$, 度量棱长时发生的误差是 $h$, 然后用度量的结果计算体积. 已知 $a=\frac{1}{2}$, $h$ 的绝对值不大于 $\frac{1}{20}$, 估计所得体积的误差.

解: 正确的体积是 $a^3$. 计算出来的体积是 $(a+h)^3$. $h$ 可正可负, 所以 $(a+h)^3$ 可以大于 $a^3$ 也可以小于 $a^3$. 误差是

$$\begin{aligned}|(a+h)^3-a^3| &= |3a^2h+3ah^2+h^3| \\ &\leqslant (3a^2+3a|h|+h^2)|h| \\ &\leqslant \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{400}\right]\frac{1}{20} \\ &= \frac{331}{400\times 20} < \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

从以上三个例题来看, (1.5)、(1.6)、(1.8)、(1.9) 各式虽然是对于实数 $a$、$b$ 证明的, 但是即使它们代表某个式子时, 各关系仍然成立. 要善于利用它们.

---

*) 任意角的正弦不大于该角. 右图中圆的半径是 1, $QP=\sin x$, 而 $\widehat{AP}=x$, 从 $PP'<\widehat{PP'}$ 可以知道 $\sin x<x$. 当 $x=0$ 时, $\sin x=x$.

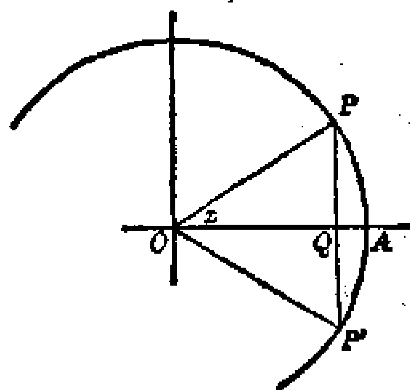



图 1-8

推理之中用到不等式时，要注意两件事：第一，不等式的两端可以用同一个正数去乘或除，但是用负数乘除时，必须掉转不等的方向；第二，不等式两端都颠倒分子分母时，必须掉转不等的方向．例如 $\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$，而 $\frac{3}{2}>\frac{5}{4}$．

【例 7】 解不等式

$$|x+3|-|x+1|<2. \tag{1.10}$$

**解**：将(1.10)改写为

$$|x+3|<2+|x+1|,$$

两端各自乘然后化简，得

$$2(x+1)<|x+1|.$$

若 $x+1$ 不是负数，这不等式便不能成立．所以 $2(x+1)<|x+1|$ 的解是 $x+1<0$．由 $2(x+1)<|x+1|$ 可以倒推到 $|x+3|<2+|x+1|$，进而推得(1.10)．因此 $x+1<0$ 是(1.10)的解．

## 1.4 区间

在一般问题里所讨论的量，时常有一定的限度．例如北京到天津的铁路，全长 137 公里，于是在这段铁路上的火车，离开北京或天津的距离，不会超过 137 公里．如果用公里作为距离的单位，在这段铁路上讨论火车的位置，只需 0 与 137 之间的一切数就够了．又如弹簧秤起码要 5 克重才可以拉开弹簧，而重量超过 100 克就会把弹簧拉坏，那么这弹簧秤的标尺只要 5 与 100 之间的数就够了．微积分里只在一段实数上讨论问题的情形很多．为了讨论方便，有规定专名的必要．

**定义 2** 介于某两个定数(点)之间的一切实数(点)叫做区间，而那两个定数(点)叫做这区间的端点．

这里“介于某两个定数之间”的意思是说只取某两数所夹的一切实数，不包括这两数本身．若用 $a$、$b$ 表示这两个数，那么以 $a$、$b$ 为端点的区间是合于

$$a<x<b$$

的一切实数 $x$，记作 $(a, b)$，读作“区间 $a$、$b$”．区间的记号和平面上点的坐标的记号一样，这会从上下文分辨出来，不致发生混乱．

如果把 $a$、$b$ 两数也包括在内，即是要合于

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切 $x$ 值，这就叫做闭区间，记作 $[a, b]$，读作“闭区间 $a$、$b$”．于是相对地说，前边所说的 $(a, b)$ 又叫做开区间．有时也用到 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 所决定的半开区间 $[a, b)$，$(a, b]$．图 1-9 是这些区间的形象．

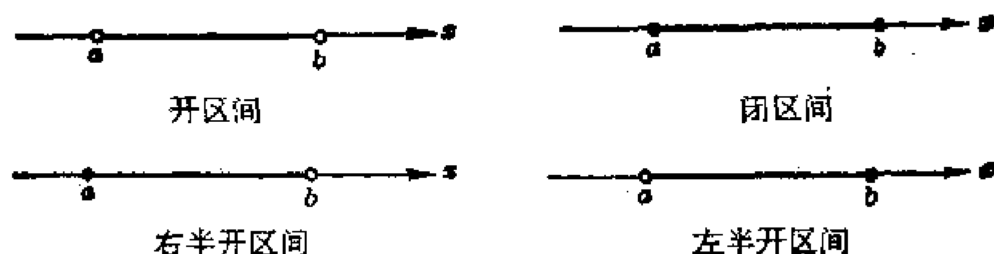



图 1-9

实际问题里用到的数未必总是有限的一段，例如说“公元以前”就不是有限的一段时间．对于这类情形，把合于 $a<x<+\infty$，$a\leqslant x<+\infty$，$-\infty<x<b$，$-\infty<x\leqslant b$，$-\infty<x<+\infty$ 的一切 $x$ 值也归于区间之类，叫做无限区间，分别记作 $(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, +\infty)$．图 1-10 是这些区间的形象．

一件事情里用到的数也可能不是区间，而是一团数，例如一切自然数，一切质数，区间 $(0, 1)$ 内的一切有理数，3 与 20

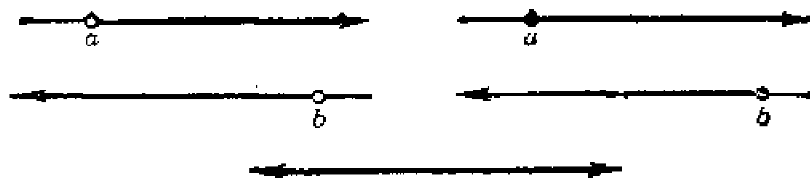


图 1-10

之间的整数．这都不是区间，应该称之为数集．平常说的实数集、有理数集、质数集，就是一切实数、一切有理数、一切质数．显然区间也是数集．

微积分讨论问题时，往往要在 $a$ 点研究某个性质，但是又不能孤立地从 $a$ 点着手，而必须从 $a$ 点附近全面地来看才能收效．例如冬至的白昼最短，绝不是从冬至一天察觉到的，而是在冬至前后观察一个时期才得到的结论．由于以后遇到的这种情况很多，所以又需要规定一个名词．

**定义 3** 以 $a$ 为中心而长度等于 $2\delta$ 的区间叫做 $a$ 点的 $\delta$ 邻域，$\delta$ 叫做这邻域的半径．

中心为$a$、半径为 $\delta$ 的邻域记作 $N(a,\ \delta)$，读作"$a$ 的 $\delta$ 邻域"．如果在同一个问题里用到同一点的大小不同的邻域，便要用半径来区别它们，至于半径该多大，要看具体情况．邻域一般都是开区间．定义 3 里说的那个邻域是 $(a-\delta,\ a+\delta)$，也就是满足不等式

$$a-\delta<x<a+\delta$$

的一切 $x$．这不等式与 $|x-a|<\delta$ 等价，所以后者也是表示邻域的一种方法．图 1-7 是 $a$ 点的一个邻域，它的半径是 $\delta$．

【例 1】 假设 $|x|>1$，问 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在原点的什么邻域之内？希望 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $N(0,\ \delta)$之内，需要 $x$ 在什么区间里？

解： 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\frac{1}{|x|}<1,$$

所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $N(0, 1)$之内．希望 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $N(0, \delta)$之内，就需要

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\delta,$$

可见 $x$ 必须满足 $|x|>\frac{1}{\delta}$，即是 $x$ 在 $N\left(0, \frac{1}{\delta}\right)$ 之外，或者说 $x$ 必须在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right]$ 及 $\left[\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$ 之内．

这例题是用 $x$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right]$ 及 $\left[\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$ 之内的值，把 $\frac{\sin x}{x}$ 的值控制在区间 $(-\delta, \delta)$ 之内．图 1-11 是两方关系的示意图．

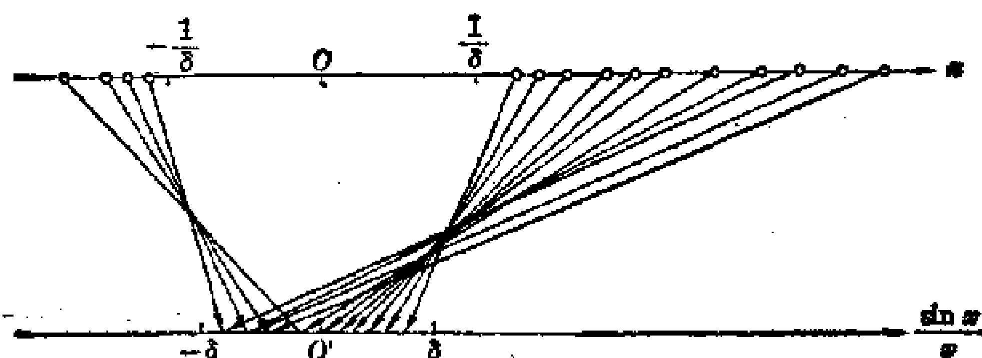



图 1-11

【例 2】 在§1.3 例 6 中如果 $a=1$．问 $h$ 在 0 的什么邻域之内才可以使误差在 $N\left(0, \frac{1}{100}\right)$ 之内$\left(\text{即是误差的绝对值不超过 } \frac{1}{100}\right)$.

解：前边已经知道

$$E=|3a^2h+3ah^2+h^3|=|3+3h+h^2||h|,$$

右端的因数$|3+3h+h^2|$不能任意小，但是$|h|$可以任意小，所以使$E$变小的原因在于$|h|$. 现在从高估计$|3+3h+h^2|$，譬如说$|h|<1$，那么$|3+3h+h^2|\leqslant 3+3|h|+h^2<7$，从而

$$E<7|h|.$$

希望$E<\frac{1}{100}$，只需$7|h|<\frac{1}{100}$，或者说$|h|<\frac{1}{700}$. 所以当$h$在$N\left(0,\ \frac{1}{700}\right)$内时，$E$在$N\left(0,\ \frac{1}{100}\right)$内.

由边长$1+h$计算的体积$V=(1+h)^3$. 当$|h|$很小时与正确体积1也差得很少. 以上的讨论说明当$|h|<\frac{1}{700}$时，$|V-1|<\frac{1}{100}$. 这不等式用邻域来叙述就是$V$在1的一个邻域之内，邻域的半径是$\frac{1}{100}$.

## 习　题　一

1. 证明$\sqrt{3}$是无理数.
2. 已知$a$、$b$是不同的两个有理数，而且$a<b$. 试用定比分点公式在$a$、$b$之间插入$n$个不同的有理数.
3. 设$a(\neq 0)$为有理数，$\lambda$为无理数. 证明$a+\lambda$、$a\lambda$、$\frac{\lambda}{a}$都是无理数.
4. 求$|(x+3)/(10-x^2)|$当$x$为$0$、$2$、$4$、$-5$、$-3\frac{1}{2}$时的数值.
5. 解不等式$\frac{1}{x-2}<a$.
6. 解下列不等式，并且在数轴上画出$x$的范围:

   (1) $0\leqslant\cos x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　　　(2) $(x+3)(x-1)(x-4)<0$.

7. 解下列不等式组，并且在数轴上画出$x$的范围:

   (1) $\begin{cases}3+x\leqslant 4+2x,\\ 5x-3<4x-1;\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}3+x>4+2x,\\ 5x-3>4x-1.\end{cases}$

8. 解下列不等式，并且在 $x$ 轴上画出 $x$ 的范围：

(1) $|x+1|<0.01$; (2) $|x|>|x+1|$;

(3) $|2x-1|<|x-1|$; (4) $||x+1|-|x-1||<1$;

(5) $|x(1-x)|<0.05$; (6) $|x^2+x-1|>1$.

9. 解不等式 $8x-4x^2<3$.

10. $x$ 是什么数值时，$x^2-5x+6$ 得负值？

11. 估计 $\cos(a+h)$ 对于 $\cos a$ 的误差，这里 $h$ 是绝对值很小的数.

12. 假设 $|x|<100$，问 $x^2$ 在原点的什么邻域内？当 $x^2$ 在 $N(0, \delta)$ 内时，问 $x$ 在什么区间里？

13. 假设 $|x|<\frac{1}{10^{100}}$，问 $x\sin\frac{1}{x}$ 在原点的什么邻域里？

14. 假设 $a$、$b$ 都是正数并且 $a^2>b^2$，求证 $a>b$. ［提示：可以用反证法，即由 $a\leqslant b$ 推出矛盾结果.］

15. 试证 $|3\sin\theta+4\cos\theta|\leqslant 5$ 对于任何实数 $\theta$ 都成立.

## 第二节　函数的一般概念

### 2.1 常量与变量

在某件事物或某种现象过程中，某种科学试验或机械运动中，总要遇到这样那样的量，例如时间、温度、重量、面积等等. 用数学处理这些量时，总是撇开它们的物质意义而只用数把量的大小、多少、长短、轻重等等表示出来. 参与一个过程中的量有变化的，有不变的. 例如密闭容器中的气体在受热时体积不变，分子数也不变，而温度与压强都变化. 又如在几何里，圆的大小可以改变，但圆周与直径之比却不变. 三角形的形状可以改变，而三个内角之和却不变，等等.

**定义 1** 在一个问题里，可以变化的量叫做变量或变数.

**定义 2** 在一个问题里，始终保持不变的量叫做常量或

常数.

习惯上用拉丁字母的末尾几个代表变量，如 $x$, $y$, $z$, $t$, $u$, $v$; 用开头几个代表常量，如 $a$, $b$, $c$, $d$ 等等. 本书以后若无特别说明，不管是常量或变量，一概指的是实数.

一种量究竟是常量还是变量，并不是绝对的，要按具体情况分析. 例如重力加速度 $g$，严格地说是变量，离地心越远它越小. 但在地球表面附近，它的差别不大，取 $g=9.8$ 米/秒$^2$，所发生的误差，一般在容许的限度以内，所以又把它当作常数. 再比如火车的速度，在刚开车和刹车阶段是变化的，在中间正常行驶时是不变的.

## 2.2 函数举例

参与在某一动态中的若干量，互相作用，发生变化. 这些量在变化中互相依赖的关系，就是函数关系. 先看几个实例:

【例 1】 圆面积 $A$ 随着它的半径 $r$ 的变化而变，变化的规律是

$$A=\pi r^2. \tag{2.1}$$

【例 2】 自由落体降落的距离 $s$ 随着降落时间 $t$ 变化，变化的规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \tag{2.2}$$

【例 3】 温度一定时，火药的燃烧速度因燃烧室内的压力而不同. 一般来说，压力越大，燃烧越快. 对于某种火药，在常温 20°C 之下，测得压力 $P$(公斤/厘米$^2$) 与燃烧速度 $v$ (毫米/秒)之间的对应关系，如下表所列:

| $P$ | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 6.2 | 8.1 | 9.6 | 11.5 | 13.5 | 15.8 |

【例 4】 图 1-12 是气象站的温度记录仪在一昼夜之内自动画成的气温曲线．它表示从时间 $t=0$（小时）到 24（小时）之间气温 $T$(℃)的变化．这里认为 $T$ 随着 $t$ 变化．每个确定的时刻 $t$ 都有一个确定的温度 $T$ 和它对应．例如 $t=14$ 时 $T=7$.

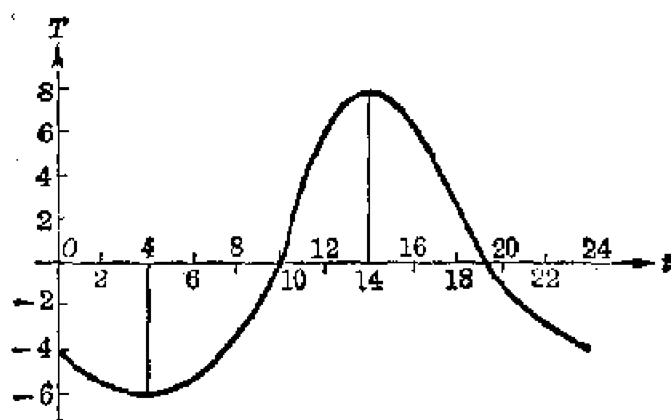



图 1-12

这四个例题里，各有两个变量．从各例的内容来看，两个变量之中有一个是主动的，另一个是被动的．比如就例 1 和例 2 来说，$A$ 与 $s$ 各是随着 $r$ 与 $t$ 而变的．$A$ 与 $s$ 是被动的，$r$ 与 $t$ 是主动的．在数学里主动变化的量叫做自变量，被动变化的量叫做函数．两个变量之间的对应关系叫做函数关系．$A$ 是 $r$ 的函数，$s$ 是 $t$ 的函数．同样在例 3 里 $v$ 是 $P$ 的函数，例 4 里 $T$ 是 $t$ 的函数．

## 2.3 函数的定义

前面用具体的问题引出了一些函数．把这些问题归结起来，粗略地说，一个变量随着另一个变量而变化时，前一个变量便是后一个变量的函数．但是更确切的说法应该是：

**定义 3** 在一个变化过程中，如果有两个变量，对于甲变

量的每个值，必有乙变量的一个确定的值按照某种规律与它对应，就说乙变量是甲变量的函数．甲叫做这函数的自变量，相对地说乙叫做因变量*)．

因变量对于自变量的依从关系，叫做函数关系．就前面的例1与例2来说，函数关系就是"自变量的平方乘以一个常数"．函数关系未必都能用公式写出来，例4就这样，然而自变量与因变量之间的对应关系是存在的．这种对应或者产生于式子的计算，或者存在于机械的运动，也可能从固定的实践手续实现．为了着重说明函数定义中的对应关系，再举几个例子如下：

【例1】 按一定方法度量线段的长度，每有一个线段，便有一个长度．所以线段的长度是线段的函数**)．这个函数关系存在于度量手续．

【例2】 把整数或有穷小数都看作以0循环的无穷小数，于是一切实数都可以写作无穷小数．现在取每个数的第二位小数的数码对应于这个数，便构成一个函数．从每个数"取其小数第二位的数码"就是实现这个函数关系．

数学里讨论函数，着重在抽象的依从关系，而不一定考虑这函数反映什么具体事实，也就是往往不管自变量与因变量所代表的现实意义是什么．因此在一个函数里代表自变量与因变量的字母是无关紧要的．例如§2.2的(2.1)是作为圆面积对于圆半径的依从关系而提出来的，但是如果把$r$看作球的直径，同一个式子又可以表示球面积对于直径的依从关

*) 因变量与函数应该有所区别．近来函数定义，多半采用下边的说法：

如果对于$x$在数集$\mathfrak{X}$的每个值，总有$y$的确定的值和它对应，其中的对应规律$f$叫做函数，这种对应关系常用记号$y=f(x)$表示．可以独立取值的$x$叫做自变量，而$y$叫做因变量．

**) 这是一个意义较为广泛的函数，因为它的自变量不是数，而是线段．

系. 如果把(2.1)里的$\pi$和(2.2)里的$\frac{1}{2}g$换作一个共同的常数$c$, 得到一个共同的公式

$$s=ct^2.$$

这一个公式又可以表示前面所说的三种依从关系.

在开始介绍函数的概念时, 为了便于理解, 曾经说因变量随着自变量的变化而变. 这种说法有时会招致一些麻烦. 例如函数

$$y=a\sin^2 x+\cos^2 x \tag{2.3}$$

的值一般是随着$x$的变化而变的, 但是当$a=1$时, $y$的值永远等于1. 如果说: $a\neq 1$时(2.3)是$x$的函数, 而$a=1$时便不是函数, 这是无谓的繁琐. 所以我们也接纳常数是函数, 即是也承认

$$y=c$$

是函数. 这叫做常量函数. 在函数的定义里, 不说乙量随甲量而变, 而说乙量的值对应于甲量的值, 有一部分原因就在这里. 自变量的一切值可以被一个值对应.

## 2.4 函数的表示法

讨论函数的性质时, 或者用函数解决问题时, 必须有方法把函数表示出来. 表示函数的方法, 通常有三种:

1. 公式法

这种方法就是用数学式子把自变量与因变量之间的依从关系写出来, 也就是在自变量与必要的常数之间, 按一定顺序施行若干次数学运算就能把函数之值算出来. §2.2里的例1和例2都属于这种情形. 大家知道, 二次函数的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0), \tag{2.4}$$

这就是对于自变量 $x$ 和常数 $a$、$b$、$c$, 经过乘方、相乘和加法构成一个代数式

$$ax^2+bx+c \tag{2.5}$$

来表示 $x$ 与因变量 $y$ 之间的依从关系. $y$ 独立地占在 (2.4) 的左端, 它的作用仅是表示右端算式的得数. 如果直接用 (2.5) 表示自己的数值, 省去表示数值的记号 $y$, 并无碍于函数定义中的对应关系, 所以(2.5)一样可以表示同一个函数, 也时常称这种不写因变数(不用等式)的式子为函数.

用公式表示函数有三个优点: 第一、函数关系清楚; 第二、容易从自变量之值求函数的对应值; 第三、便于用分析的方法讨论函数的性质, 而这是微积分的主要任务. 缺点是不直观, 有时需要作复杂的计算.

2. 列表法

§2.2 的例 3 就是用列表法给出来的函数. 大家熟悉的三角函数表、对数表、三角函数对数表、方根方幂表都是表示函数的. 在生产实践中用列表法表示函数的事例很多, 火车的运行时刻表、客票价目表、行李运费表、邮局的包裹运费表等都是函数.

列表法的优点是不需计算就能知道函数的值. 但是表里列出来的函数值究竟有限, 而函数的值一般多至无穷, 如果用到表中未列的函数值就不方便了. 另一个缺点是, 不容易从表里察觉函数的变化情况. 所以用列表法讨论函数的性质不够方便.

3. 图象法

按直角坐标在平面上绘制函数图象的基本原则是初等代数或解析几何中讲过的. 给了一个函数, 无异于给了很多组两两对应的数对. 在每对这样的实数里, 取自变量的值为横

坐标，函数的值为纵坐标，便决定平面上的一点．用几何术语来说，就是这样的点满足函数关系．

**定义 4** 在一个函数关系中，以自变量的值为横坐标，以函数的对应值为纵坐标，由这样的所有点在平面上结成的轨迹，叫做这函数的图象．

函数的图象一般是曲线，这里所说的曲线也包括直线．普通情形，有了函数就能画出它的图象，反过来说，平面上每有一条曲线，便确定一个函数．用曲线表示函数的方法，叫做图象法．气温记录仪画出来的曲线，就是用图象法给出来的函数．

对于图象法给出来的函数，既不能进行数学运算，又不能得到函数的准确数值，这是图象法的缺点．然而它却有一个很大的优点，就是表示得直观，可以启发我们研究的方向，也可以用来验证结果．

知道了图象法的好处，每当用公式给出函数时，为了粗略地认识它的性质，应该先把图象画出来，借以帮助理解函数的内在联系．至于画图象的初等方法，可以借用平面解析几何里的知识．

## 2.5 分段函数

一个能用公式写出来的函数，只用一个式子未必能写出来．在科学技术或生产实践中，这样的情形为数不少．为了将来接触实际，我们应该对于这类函数有所认识．

【例 1】 铁路上包裹的运价一方面因里程而变，另一方面又因重量而变．现在把两种情形各取一种，简单的说一下：

(1) 重量固定在 5 公斤以内时，根据里程 $s$ (公里) 按下列条款收费：

$0<s\leqslant 60$ 时，每公斤收费 0.1 元，

$60<s\leqslant 120$ 时，每公斤收费 0.2 元，

$120<s\leqslant 160$ 时，每公斤收费 0.3 元，

$160<s\leqslant 220$ 时，每公斤收费 0.4 元．

每公斤的运费 $y$ 对于里程 $s$ 的函数是

$$y=\begin{cases}0.1, & 0<s\leqslant 60,\\ 0.2, & 60<s\leqslant 120,\\ 0.3, & 120<s\leqslant 160,\\ 0.4, & 160<s\leqslant 220.\end{cases}$$

图 1-13 画的是它的图象．这叫做阶梯函数．

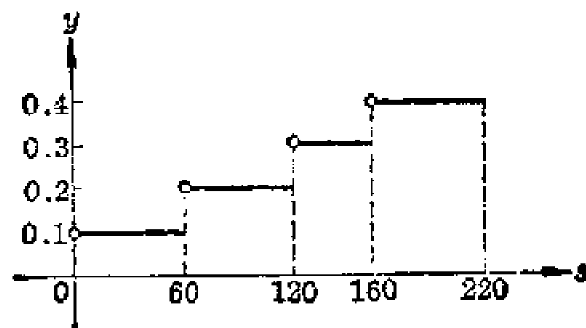



图 1-13

(2) 里程在 50 公里以内时，根据包裹的重量 $w$(公斤)，按下列条款收费：

$0<w\leqslant 5$ 时，每公斤收费 0.1 元，

$5<w\leqslant 50$ 时，每公斤收费 0.15 元．

这时候 $y$ 对于 $w$ 的函数是

$$y=\begin{cases}0.1\times w, & 0<w\leqslant 5,\\ 0.1\times 5+0.15\times(w-5), & 5<w\leqslant 50.\end{cases}$$

图 1-14 画的是这函数的图象．因为这图象是折线，所以这样的函数叫做折线函数．

【例 2】 电子技术中有所谓锯齿波，电压 $u$ 对于时间 $t$

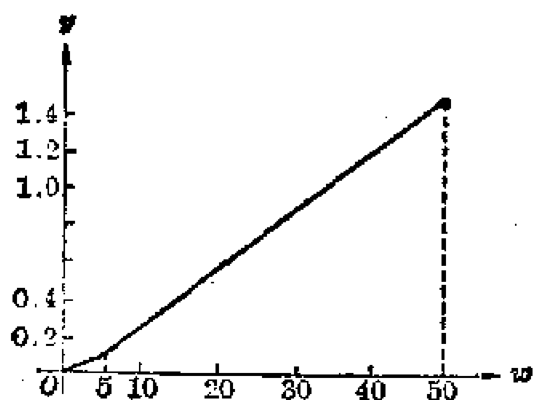


图 1-14

的依从关系犹如图 1-15 所示，这图象是一串斜角为 45°，长度等于 $\sqrt{2}$ 的线段，左下端是 $x$ 轴上的整数点．表示这函数的式子是：

$$u=t-k,\ k<t\leqslant k+1,$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

以上三个函数统称为分段函数。

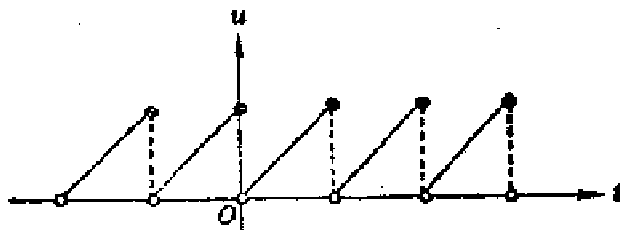


图 1-15

应该知道，函数与函数的表达式不是一回事． 函数是自变量与因变量的对应规律，是问题的本质，表示函数的式子是表示这种对应规律的工具． 所以同一个函数，可以有不同的表达式．如果用 $(x)$ 表示 $x$ 的小数部分，那么例 2 的函数还可以写作

$$y=(x).$$

又如
$$y=|\sin x|,$$

$$y=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

$$y=\begin{cases}\sin x, & 2k\pi\leqslant x<(2k+1)\pi,\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & (2k+1)\pi\leqslant x<(2k+2)\pi,\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

这三个等式表示同一个函数，它的图象是图 1-16 所画的曲线.

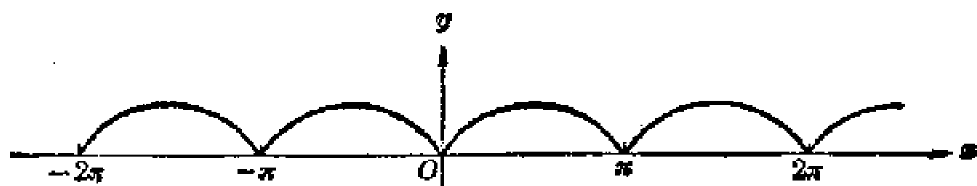



图 1-16

## 2.6 函数的符号

讲三角函数时，因为不愿意次次写"$x$ 的正弦"，而选了一个简写的记号 $\sin x$. 这记号已经成了专名词. 现在讨论函数，也有这样的问题. 然而现在不是要对某些函数规定专用的符号. 以后讨论 $y$ 对于 $x$ 的依从关系时，往往不专指某个具体的函数，而只说 $x$ 的某个函数. 凡是这样泛指的函数，尤其需要有表示它的符号. 即便是具体的函数，有具体的公式表示它，如果每提它一次便把公式写一回，也未免过于麻烦. 象这样情形，应该有一个简写的方法. 如果同时涉及的不止一个函数，又需要在讨论之中给每个函数临时规定一个名称或符号，以便于书写和叙述. 这一切都要求对于函数有简便的符号.

"$y$ 是 $x$ 的函数"这句话时常简写为

$$y=f(x). \tag{2.6}$$

这里的 $f$ 是"函数"的拉丁字 function 的字头，叫做函数符号．它不代表任何数，而只代表自变量 $x$ 与因变量 $y$ 之间的对应规律，也就是 $y$ 对于 $x$ 的依从关系． 如果(2.6)表示§2.3例1所说的函数，那么 $f$ 便代表度量长度的方法．如果(2.6)代表§2.3例2的函数，那么 $f$ 就表示从 $x$ 的小数写法里取小数部的第二位数码．如果(2.6)指的是

$$y=cx^2,$$

$f$ 就表示把 $x$ 自乘以后再乘以常数 $c$.

如果函数是用公式给出来的，$f$ 便代表这公式里的全盘运算．比如(2.6)代表

$$y=3x^2+5x+4$$

时，$f(x)$ 就是 $3x^2+5x+4$．这时 $f$ 好象是一组运算的框架

$$f(\quad)=3(\quad)^2+5(\quad)+4,$$

其中包含下边这样一组运算：第一、3乘某数的平方，第二、5乘同一个数，第三、把前两个得数和4加在一起．把这个运算框架用于变数 $x$，就得到 $f(x)$，也就是得到 $3x^2+5x+4$． 把这运算框架用于0，$-5$，2，就得到

$$f(0)=3\cdot0^2+5\cdot0+4=4,$$
$$f(-5)=3(-5)^2+5(-5)+4=54,$$
$$f(2)=3(2)^2+5(2)+4=26.$$

所以 $f(0)$、$f(-5)$、$f(2)$ 就是函数 $3x^2+5x+4$ 对应于 0，$-5$，2的值；

$$f(a)=3a^2+5a+4$$

就是 $3x^2+5x+4$ 对应于 $a$ 的值．所以函数记号 $f(x)$ 不仅可以简单地表示一个函数，而且可以很省事地表示函数的值．以后只要看到 $f(a)$，不必说明就知道它是 $f(x)$ 所代表的函数在 $x=a$ 的值．这时要注意：$f(a)$ 不是 $a$ 的函数，而只是 $f(x)$

在 $a$ 点的值.

【例 1】 已知 $f(x)=\sin x+\cos x$. 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

解: $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

【例 2】 设 $f(x)=x^2+ax+b$, 已知 $f(-3)=f(2)=0$. 求这函数. 然后求 $f(a+1)$, $f(\sqrt{3}+1)$, $f(a+h)-f(a)$.

解:

$$f(-3)=9-3a+b=0,$$
$$f(2)=4+2a+b=0.$$

由这组方程解得 $a=1$, $b=-6$. 所以

$$f(x)=x^2+x-6.$$

$$f(a+1)=(a+1)^2+(a+1)-6=a^2+3a-4.$$

$$f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}+1)-6$$
$$=(\sqrt{3})^2+3\sqrt{3}-4=3\sqrt{3}-1.$$

$$f(a+h)-f(a)=[(a+h)^2+(a+h)-6]-(a^2+a-6)$$
$$=(2a+1)h+h^2.$$

【例 3】 设 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, 求 $f\left(\frac{b}{a}\right)$, $f\left(\frac{b}{a}\right)+f\left(\frac{a}{b}\right)$, $f\left(f\left(\frac{b}{a}\right)\right)$. 并证明 $f(-x)=f(x)$; $x\neq 0$ 时, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

解: $f\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\Big/\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

$$f\left(\frac{b}{a}\right)+f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0.$$

$$f\left(f\left(\frac{b}{a}\right)\right)=\left\{\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2-1\right\}\Big/\left\{\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2+1\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2-1\right\}\Big/\left\{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2+1\right\}$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2-(b^2+a^2)^2}{(b^2-a^2)^2+(b^2+a^2)^2}=\frac{-2a^2b^2}{a^4+b^4}.$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x).$$

$x\neq 0$时，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2-1\right]\Big/\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2+1\right]$

$$=\frac{1-x^2}{1+x^2}=-f(x).$$

【例 4】 设$f(x)=x+\frac{1}{x}$. 试将$f(x^2)$，$f(x^3)$用$f(x)$表示出来. 再求$f(x+h)-f(x)$.

解: $f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=[f(x)]^2-2$,

$$f(x^3)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=[f(x)]^3-3[f(x)].$$

$$f(x+h)-f(x)=\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=h+\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=h-\frac{h}{x(x+h)}.$$

若同时讨论几个函数，便必须用不同的符号表示不同的函数. 表示函数的记号，除去$f$而外，还时常用$F$、$\Phi$、$\Psi$、$\varphi$、$\psi$、$g$等等，写作

$$y=F(x),\ y=\varphi(x),\ y=g(x),\ \cdots$$

在同一个问题里，一旦指定了$y=f(x)$代表某一个函数，便须

始终用这一个符号表示这函数，不许中途更改.

例如圆周长 $l$ 及圆面积 $A$ 都是半径 $r$ 的函数. 如果在同一个问题里要用这两个函数，便需要选两个记号表示它们. 比如可以用 $l=f(r)$ 代表 $l=2\pi r$，用 $A=F(r)$ 代表 $A=\pi r^2$.

如果未曾给函数指定一个符号而要写它的函数值，比如要写圆面积 $A$ 当 $r=3$ 时的值，也时常写作 $A|_{r=3}$. 这记号就代表 $\pi\cdot 3^2$. 又如 $r=a$ 时 $l$ 的值就写作 $l|_{r=a}=2\pi a$.

## 习 题 二

1. 试在物理现象与日常生活中举几个变量与常量的例子.
2. 方程 $x^2+x-1=0$ 中的 $x$ 是常量还是变量？方程 $x+y+1=0$ 中的 $x$、$y$ 是变量吗？$y$ 是 $x$ 的函数吗？
3. 在匀速直线运动中，物体运动的速度 $v$ 是常量还是变量？它是时间 $t$ 的函数吗？如果是的话，写出它们的关系式来.
4. 由函数 $f(x)=(x-3)/(2+x)$，求 $f(0)$、$f(1)$、$f(3)$、$f(-3)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(\sqrt{3})$、$f(2a)$.
5. 由函数 $\varphi(t)=t^3-1$，求 $\varphi(1)$、$\varphi(a)$、$\varphi(a+1)$、$\varphi(a-1)$.
6. 由函数 $F(x)=3^{1-x}$，求 $F(0)$、$F(1)$、$F(2)$、$F(-1)$、$F(2.5)$.
7. 设 $f(x)=x^2-2x+3$，解方程

   (1) $f(x)=f(0)$;　　　　(2) $f(x)=f(-1)$.
8. 已知 $x+\frac{1}{x}=5$，求 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值.
9. 设 $\psi(x)=x^5-9x$，试证 $\psi(-x)=-\psi(x)$.
10. 设 $F(x)=x^2+ax+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}$，求证 $F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$.
11. 设 $\Phi(x)=\frac{\sin x}{x}$，试证 $\Phi(-x)=\Phi(x)$.
12. 设 $f(x)=x+5$，$\varphi(x)=x-7$，试解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

13. 设 $f(x)=(|x|-x)(2+x)$，问 $x$ 取什么值时:

(1) $f(x)=0$;　　　　　　　　(2) $f(x)<0$.

14. 用$[x]$表示不大于$x$的最大整数，例如$[3]=3$，$[\pi]=3$，$[-2.4]=-3$. 作函数$y=[x]$及$y=[x]-x$的图象.

15. 形状为$ax+b(a\neq 0)$的函数叫做线性函数. 假设$n$是整数，有一个函数$f(x)$在每个区间$n\leqslant x<n+1$之内，它是线性函数，又知道$f(n)=-1$，$f\left(n+\frac{1}{2}\right)=0$. 用数学式子把这函数写出来，并且画它的图象.

## 2.7 定义域、值域

自变量$x$使函数有意义的取值范围，叫做这函数的定义域. 相应的因变量$y$的变化范围叫做函数的值域. 实际中的问题都有客观的运动背景，所以反映运动过程的函数，也随着运动过程有始有终，因而其中的自变数和因变数也往往限在某些范围以内，这些范围就是函数的定义域和值域. 例如自由落体如果开始降落以后经过$T$秒撞在地面上，那么函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{2.7}$$

的自变量$t$只能取区间$[0, T]$内的值. 区间$[0, T]$就是函数(2.7)的定义域. $s$的值一定在0与$\frac{1}{2}gT^2$之间，所以函数(2.7)的值域是$\left[0, \frac{1}{2}gT^2\right]$. §2.5例1中两个函数的定义域是$(0, 220]$和$(0, 50]$.

定义域是函数的组成部分，没有定义域应该说函数的定义不完备. 然而纯粹数学讨论的函数，没有实际背景，往往不说明它的定义域. 函数若是用表示式写出来的，一般认为定义域是自变量使表示式有意义的取值范围. 这一说法虽然不合理，但是已经成了习惯的说法.

【例 1】 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x=0$ 时没有确定的值，除此而外，$y$ 都有确定的值，因此 $\frac{1}{x}$ 的定义域是除去 $x=0$ 以外的一切实数．详细地写出来就是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 两区间．这情形也可以只简单地写 $x\neq 0$．函数的值域也是除去 0 以外的一切实数．

【例 2】 在实数范围内，函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域和值域都是区间 $[0, +\infty)$．

【例 3】 下列各函数在什么范围有意义，并求它们的值域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　　　(2) $y=\sin x$；

(3) $y=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$．

解：(1) 要使 $y$ 是实数，必须被开方的式子 $1-x^2$ 是正数或 0，即是 $1-x^2\geqslant 0$，或者说须要

$$x^2\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant 1$．因此 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 或者说是区间 $[-1, 1]$．函数的值域是 $0\leqslant y\leqslant 1$．

(2) 不论 $x$ 是什么实数，$\sin x$ 都有确定的对应值，所以

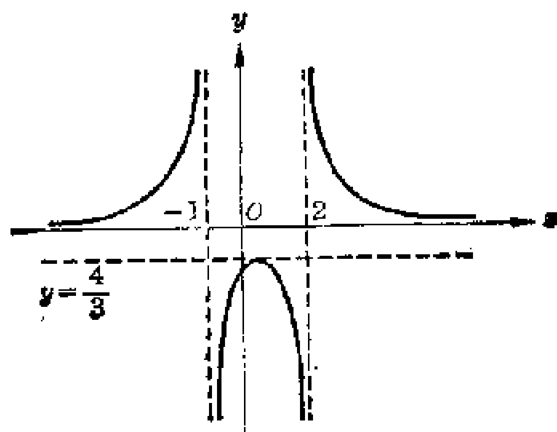



图 1-17

$y=\sin x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$；值域是区间$[-1, +1]$.

(3) 当 $x=-1$ 或 $x=2$ 时，$\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$ 没有意义，除此而外都有意义(图 1-17). 所以

$$y=\frac{3}{(x+1)(x-2)} \tag{2.8}$$

的定义域包括三个区间：$(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, +\infty)$.

将(2.8)变作 $x$ 的二次方程

$$x^2y-xy-(2y+3)=0,$$

由此解 $x$，得

$$x=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{\frac{3(3y+4)}{y}}\right].$$

从这里知道，当 $-\dfrac{4}{3}<y\leqslant 0$ 时，使 $x$ 得虚数. 所以函数的值域是区间$\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right]$以外的一切实数. 即是区间$\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right]$和$(0, +\infty)$.

【例 4】 问 $y=\ln\cos x$ 在 $x$ 的什么范围有意义？

解：必须 $\cos x>0$ 时 $\ln\cos x$ 才有意义(图 1-18). 所以这函数的定义域是无限多个开区间

$$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

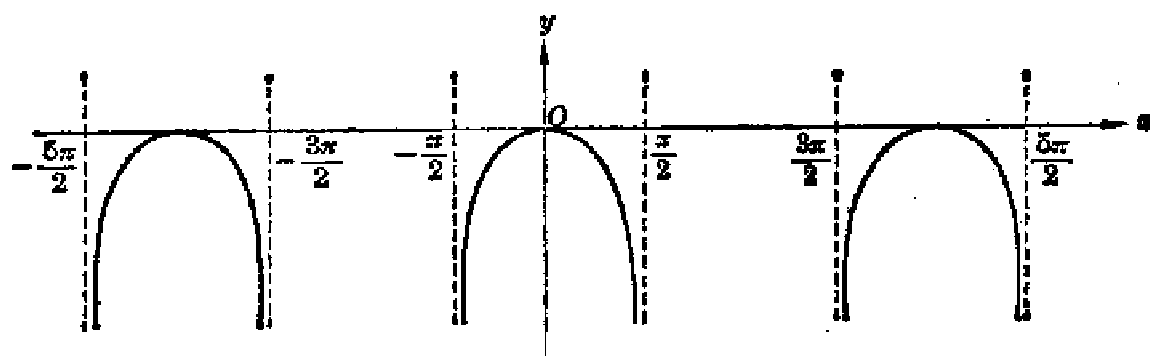



图 1-18

上述函数的定义域都是由区间组成的，但也可能不是区间，而是一个数集(§1.4)．例如

$$y=\sqrt{\ln\cos x}$$

的定义域便是点集 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．最常用到的数列 $\{u_k\}(k=1,2,3,\cdots)$就是用自然数作定义域的函数(通常也说是定义在自然数集上的函数)．

## 习 题 三

1．问下列各函数在 $x$ 的什么范围有定义？

(1) $y=\sqrt{x-1}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

(3) $y=\sqrt{7-3x}$;　　(4) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$;

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;　　(6) $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}$;

(7) $y=\sqrt{4-x^2}$;　　(8) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

(9) $y=\sqrt{1-|x|}$;　　(10) $y=\lg(x-2)$;

(11) $y=\dfrac{\lg(x-2)}{\lg(3-x)}$;　　(12) $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(13) $y=\sqrt{\sin x-1}$;　　(14) $y=\arccos\dfrac{x-2}{5-x}$.

2．比较下面两个函数的定义域，说明它们是否恒等：

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1};\quad \varphi(x)=\sqrt{x(x-1)}.$$

3．试举出一个函数，要它除去在 $x=0$、$x=3$、$x=4$ 三点而外，对于其余一切实数 $x$ 都有定义．

4．作下列函数的图象：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

这叫做符号函数．

5．作函数 $y=\operatorname{sgn}\cos x$ 的图象．

6．作下列函数的图象：

$$f(x)=\begin{cases}2, & 若 x\leqslant -1, \\ -x, & 若 -1<x\leqslant 0, \\ x, & 若 0<x\leqslant 1, \\ 2, & 若 1<x.\end{cases}$$

7．设

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & 若 x<0, \\ 0, & 若 x=0, \\ -x+1, & 若 x>0.\end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(0.5)$，并作函数的图象．

8．作函数 $y=2-|x|\ (-\infty<x<+\infty)$ 的图象．

9．假设当 $n\leqslant x<n+1\ (n=0, 1, 2, \cdots)$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{n+1}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$f(\sqrt{10})$，$f\left(\dfrac{110}{3}\right)$，并画这函数的图象．

## 2.8 从实际问题建立函数

用数学解决实际问题，必须能用数学式子把问题中各因素之间的关系表达出来．如果是变化关系，就必须用数学式子把各因素之间的函数关系表达出来．这是用数学解决实际问题时的重要一环．从实际问题建立函数式子大致分以下三步：

第一步：彻底了解问题中各量之间的关系，认清谁是常量，谁是变量，哪个变量该作因变量，哪个变量该作自变量．

第二步：可能的话，画一个简单的示意图，在这里把常量、因变量、自变量各用适当的字母或符号标示出来．所要讨论的现象是变动的，选一个不特殊的情况画出来就行了．

第三步：根据已知的几何知识、物理知识或有关专业知识，分析各量之间的内在联系，然后用数学式子把这关系表达

出来，就可以得到所要的函数.

【例 1】 有一块边长是 2 尺的正方形铁皮，从它的四角各裁去一个小正方形，各小正方形的边长相等，然后把四边凸出的部分折起来，作成一个敞口的方盒子. 求这盒子的容积和所裁去的小正方形边长的函数关系.

解：问题未曾说四角裁去的小正方形如何摆布，但是既然要作成正方盒子，那么小正方形的各边一定要和原正方形各边分别平行.

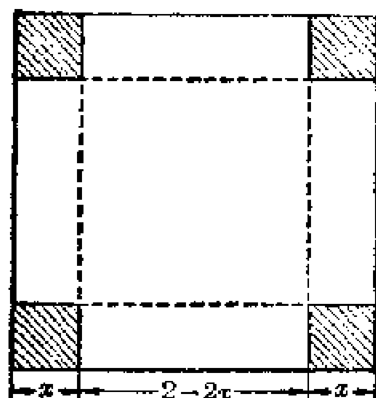


图 1-19

第一步：正方铁皮的边长 2 尺是常量. 设所裁小正方形的边长是 $x$，方盒子的容积是 $V$，$x$ 和 $V$ 都是变量. $x$ 的变化范围是区间 $(0, 1)$. $x$ 很小时，盒子的底大但是很浅，$x$ 逐渐变大时，盒子的底逐渐变小同时逐渐加深. 可以认为：$V$ 是随着 $x$ 而变的. $x$ 该是自变量，$V$ 是因变量.

第二步：作图，如图 1-19，其中画着阴影线的部分是要裁去的小方角，它的边长 $x$ 就是将来盒子的高. 虚线表示折起四边凸出部分时的折痕. 虚线围成的正方形是盒子的底，它的边长是 $2-2x=2(1-x)$.

第三步：由于方柱体的体积等于底面面积与高的乘积，现在底面积等于 $4(1-x)^2$，所以盒子的容积是

$$V=4x(1-x)^2.$$

这就是所求的函数关系.

如果问题所问的是“盒子的容积对于小正方形边长的依赖关系”，就是问题已经指定了 $x$ 是自变量，$V$ 是因变量，第一

步工作就可以省去选择手续．谁该作因变数谁该作自变数的问题，以后在具体问题的文字叙述中可以体察出来．

【例 2】 曲柄连杆(图 1-20)是许多机器的基本部件．连杆一端挂在主动轮轮缘上一点 $A$(可以转动)，另一端挂在滑块 $B$ 上(也可以转动)．当主动轮旋转时，带动连杆运动，连杆又带动滑块 $B$ 往返移动．假设运动开始时，$OA$ 在线段 $OB$ 上．主动轮以等角速度 $\omega$ 旋转．求滑块 $B$ 的运动规律．

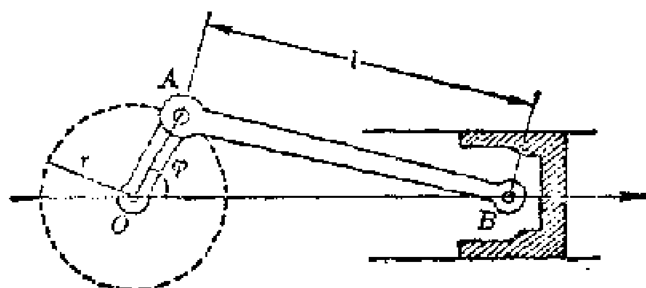



图 1-20

解：这里 $A$、$B$ 两点都是动点，为了分析运动关系，不得不暂时把它们看作静止的．

第一步：假设主动轮的中心是 $O$，半径是 $r$，连杆的长是 $l$，主动轮旋转的角速度是 $\omega$．$r$、$l$、$\omega$ 都是常数．$O$ 是定点，因此可以用 $O$ 作基准点来看 $B$ 点的位置．$B$ 点有时向 $O$ 靠拢，有时又离开 $O$ 往外走．这些变化集中地表现为 $OB$ 之长的变化．$B$ 点运动的原因在于 $OA$ 的旋转，$OA$ 的位置决定于 $\varphi=\angle BOA$．可以暂时把 $\varphi$ 看作自变量，$s=OB$ 看作因变量．

第二步：作示意图(图 1-21)，作 $AA'\perp OB$．则 $OB=OA'+A'B$．问题的关键在于怎样用 $\varphi$ 把 $OB$ 之长 $s$ 表达出来．

第三步：由于 $OA'=r\cos\varphi$，$A'A=r\sin\varphi$，从而

$$A'B=\sqrt{l^2-A'A^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

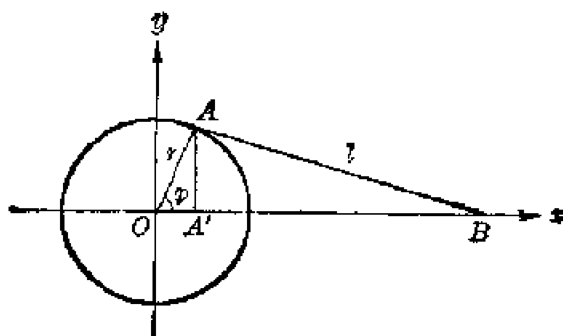



图 1-21

所以
$$s = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

已知主动轮的角速度是 $\omega$，现在设主动轮开始旋转后经过的时间是 $t$，那么 $\varphi=\omega t$. $t=0$ 时，$\varphi=0$. 这时 $OA$ 在 $OB$ 上，与问题中的条件相符. 用 $\omega t$ 代替上边等式里的 $\varphi$，就得到所求的函数

$$s = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}.$$

从这等式来看，必须 $l>r$ 才能使右端对于一切实数 $t$ 有意义. 从物理上看这是怎么回事呢？请读者想想.

【例 3】 身高 5 尺的人在路灯一旁沿着一条水平直线行走. 这条直线到灯杆的距离是 8 尺，灯高 20 尺. 求这人的影长的变化规律.

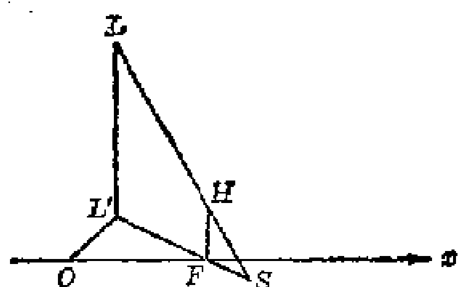



图 1-22

解：第一步：这里 5 尺、8 尺、20 尺都是常数. 人影长 $s$ 是变数. 按问题的要求，是要以 $s$ 为因变数的. 那末，用什么作自变数呢？情况较为复杂，为此首先作图.

第二步：$LL'$(图 1-22)是灯杆，$L$ 是路灯，$LL'=20$ 尺. $Ox$ 是人走的水平直路，$L'O\perp Ox$，$L'O=8$ 尺. 假设 $FH$ 是 5 尺高的行人. $LH$ 与 $L'F$ 交于 $S$，$FS$ 便是人的影长 $s$.

$s$ 随着 $F$ 的位置而变. $F$ 的位置固然可以说决定于 $L'F$ 的长，然而 $L'F$ 与人的行动的关系是间接的. 不如用 $x=OF$ 来决定 $F$ 的位置. 这样就可以说 $s$ 的大小取决于 $x$ 的数值.

第三步：$\triangle SFH\sim\triangle SL'L$, 那么

$$\frac{s+L'F}{s}=\frac{L'L}{FH}=\frac{20}{5}=4,$$

所以 $\frac{L'F}{s}=3$, 或者说

$$s=\frac{1}{3}L'F.$$

根据勾股定理知道：$L'F=\sqrt{OF^2+L'O^2}=\sqrt{x^2+8^2}$. 把这结果代入上边的等式，得到

$$s=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+64}.$$

这就是所求的函数.

如果问题中再加上行人的速度为每秒 3 尺，答案就应该把 $s$ 表示为时间 $t$ 的函数. 应该怎样改变上边的结果？请读者自己考虑.

## 习 题 四

1. 三角形两边之长 $a$、$b$ 一定，夹角 $\gamma$ 不定. 试将三角形的面积 $S$ 用 $\gamma$ 的函数写出来. 指出这函数的定义域.
2. 有一个圆柱形容器，它的底半径是 $a$ 寸，高是 $h$ 寸. 现在用水注入这容器. 求水的体积 $V$ 与水深 $x$ 的函数关系. 如果以每秒 $k$ 立方寸的均匀速度注水，求水深 $x$ 对于时间 $t$ 的函数关系. 写出这两个函数的定义域和值域.
3. 弹簧完全放松时长度为 $2l$. 把它的一端固定起来，再把它压缩到原长的一半，然后用它推动一个物体. 已知弹性系数是 $k$. 试将物体所受的力 $F$ 用弹簧的长度表示出来. 如果 $l=10$ 厘米，弹簧压

缩 0.5 厘米时，弹力为 1 公斤. 求 $F$ 的表达式. [注: 弹力与弹簧的压缩长度成正比.]

4. 脉冲发生器产生一个三角波，波型如图 1-23. 试求电压 $u$ 对于时间 $t$ 的函数 $u(t)$.

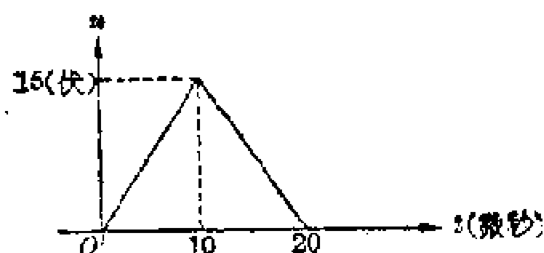


图 1-23

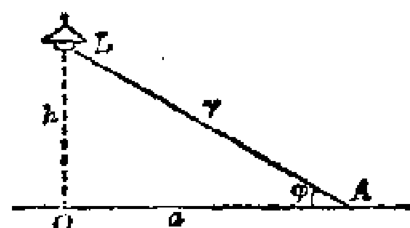


图 1-24

5. 电灯 $L$ 对于 $A$ 点的水平距离 $a$(图 1-24) 不变，铅直距离 $h$ 可以改变. 由 $A$ 点看灯时，仰角为 $\varphi$. 已知电灯对于 $A$ 点的照度与 $\sin\varphi$ 成正比，与 $LA$ 的平方成反比. 试将照度 $J$ 表示为 $h$ 的函数.

6. 人工开凿的直线运河经过相距 $d$ 公里的 $A$、$B$ 两城(图 1-25). 在 $B$ 城垂直于运河的方向上离 $B$ 城 $l$ 公里有一个工厂 $C$. 从 $A$ 城运货到工厂，先从水路到一地 $M$，然后走陆路从 $M$ 到 $C$. 假设一吨货物每公里水路运费为 $\alpha$ 元，陆路运费为 $\beta$ 元. 求每吨总运费与 $MB$ 之间的函数关系.

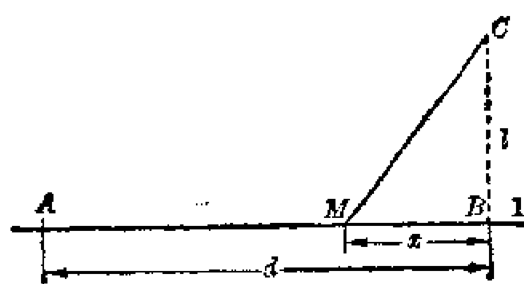


图 1-25

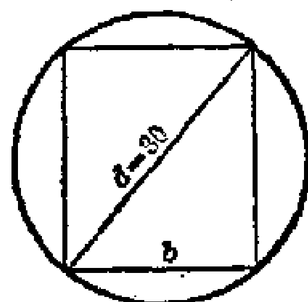


图 1-26

7. 把直径为 30 厘米的木材，锯成横断面为矩形的房梁. 设矩形的宽是 $b$. 试将矩形面积 $A$ 表示为 $b$ 的函数(图 1-26).

8. 图 1-27 $\triangle ABC$ 内 $BC$ 上的高 $AO=6$, $BO=3$, $OC=7$. 内接长方形 $DEFG$ 的高是 $h$. 把这长方形的面积 $S$ 表示为 $h$ 的函数及 $OE$

的函数.

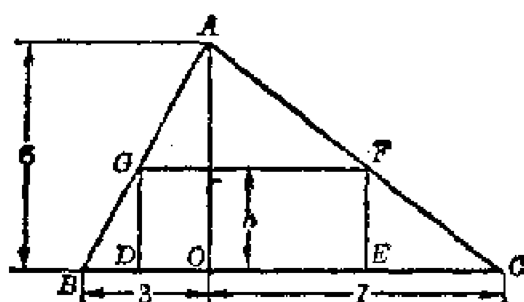



图 1-27

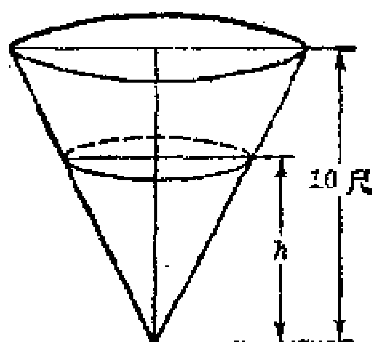



图 1-28

9. 倒圆锥形的蓄水器(图 1-28)口径与深度都是 10 尺. 如果以每分钟 6 立方尺的速度往容器里注水, 求容器内水深对于时间的依从关系.

10. 把 10 尺长的杆子 $AB$ 靠在墙上, 它的下端 $A$ 按每秒 2 尺的速度离开墙根 $O$.

 (1) 把上端 $B$ 下降的情况用时间 $t$ 的函数写出来;

 (2) 把 $\triangle OAB$ 的面积用时间 $t$ 的函数写出来.

11. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上 $P(x, y)$ 点的横坐标从原点开始以每秒 2 单位的速度移动, 求纵坐标 $y$ 的变化规律. 如果 $x$ 在横轴上从 5 开始移动, $y$ 又按怎样的规律变化? 假设线段 $OP$ 的分点 $Q$ 满足 $\frac{OQ}{QP}=r$, 问 $Q$ 点的两个坐标又各按怎样的规律变化? 对这两种情形都将函数的定义域找出来(时间可以倒推).

## 2.9 讨论函数的一些术语

在讨论函数的性质时, 要用到几个常用的名词, 现在把它们介绍一下. 这里和以后, 凡说自变数的变化时, 若无特别说明, 一概指的是由小而大(代数)地连续变化.

1. 奇函数与偶函数

**定义 5** 如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的一切 $x$ 合于关系 $f(-x)=f(x)$, 便说 $f(x)$ 是偶函数; 若是合于关系

$f(-x)=-f(x)$，便说 $f(x)$ 是奇函数。

在偶函数的情形，若 $y=f(x)$ 的图象上有一点 $(x_1, y_1)$，便一定还有一点 $(-x_1, y_1)$，而 $(x_1, y_1)$ 与 $(-x_1, y_1)$ 两点关于 $y$ 轴对称。所以偶函数的图象一定关于 $y$ 轴对称。例如 $x^2$ 与 $\cos x$ 都是偶函数，这因为 $(-x)^2=x^2$，$\cos(-x)=\cos x$。因此在方程 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 里将 $x$ 换作 $-x$ 时方程不变。所以曲线关于 $y$ 轴对称(图 1-29)。

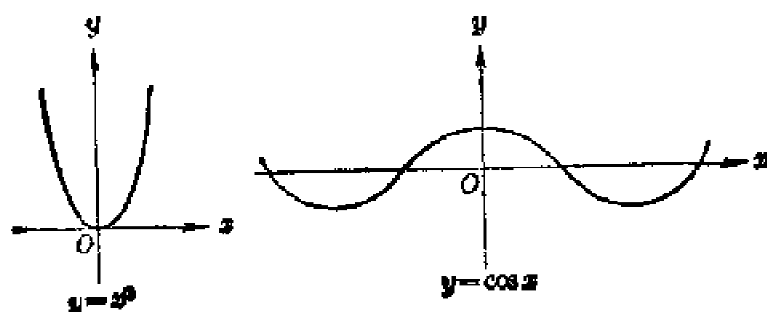


图 1-29

在奇函数的情形，若曲线 $y=f(x)$ 上有一点 $(x_1, y_1)$，由于 $f(-x)=-f(x)=-y$，必然还有一点 $(-x_1, -y_1)$，所以曲线关于原点对称。例如 $x^3$ 与 $\sin x$ 都是奇函数，这因为 $(-x)^3=-x^3$，$\sin(-x)=-\sin x$。因此在方程 $y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 里，把 $x$ 换作 $-x$ 时，$y$ 必然也跟着变号；或者说，如果 $x$，$y$ 同时变号，方程不变，而这是曲线关于原点对称的条件(图 1-30)。

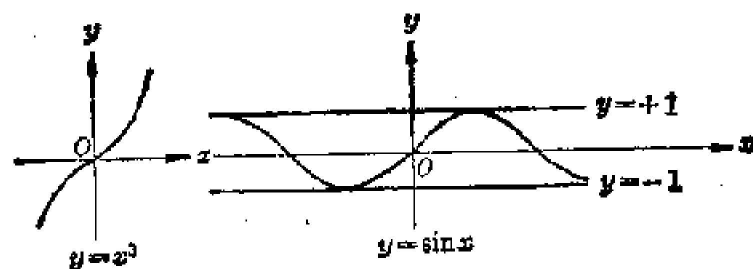


图 1-30

当然也有不奇不偶的函数，如 $y=x+1$，$y=2\sin x+\cos x$.

2．有界函数

**定义 6** 如果 $|f(x)|$ 的一切值都不大于某个正数 $M$，即是说对于函数 $f(x)$ 的定义域的一切 $x$ 值，不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，便说 $f(x)$ 是有界函数.

例如对于 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的一切 $x$，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界函数．又如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 对于它的定义域 $[-a,\ a]$ 内的一切 $x$ 值，$0\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\leqslant a$，所以 $\sqrt{a^2-x^2}$ 是有界函数.

不是有界的函数，是无界函数，详细地说，即是：

**定义 7** 如果不论 $M$ 是多么大的正数，在函数 $f(x)$ 的定义域里，总有 $x$ 的值使得 $|f(x)|>M$，便说 $f(x)$ 是无界函数.

例如 $\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 是无界函数．这因为不论正数 $M$ 多么大，总有异于零的 $x_1$ 满足 $|x_1|<\frac{1}{M}$，那么 $\left|\frac{1}{x_1}\right|>M$．又如 $5-x^2$ 是无界函数．这因为不论正数 $M$ 多么大，总有 $x$ 的值 $x_1$，满足 $|x_1|>\sqrt{M+5}$，于是 $x_1^2>M+5$，从而 $-M>5-x_1^2$，这表示 $5-x_1^2$ 是负数而且小于 $-M$，所以 $|5-x_1^2|>M$．这里显然对于定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 的一切 $x$，$5-x^2\leqslant 5$．函数的值最大不过 5，尽管如此，函数还是无界的．函数仅仅在上方或下方一面有界，还不能说它有界.

当然也可以只在一个区间里（定义域的一部分里）谈函数有界或无界．例如 $\frac{1}{x}$ 在 $(1,\ +\infty)$ 或 $[-3,\ -2]$ 内有界，这因为 $x>1$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|<1$．$-3\leqslant x\leqslant -2$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2}$．在 $(0,\ 1)$ 内无界．这种情形，一定要把区间明确出来.

3. 同号区间

**定义 8** 如果 $x$ 在区间 $(a, b)$ 内，函数 $y=f(x)$ 的值都是正(负)数，便说 $(a, b)$ 是 $f(x)$ 的正(负)值区间. 正值区间与负值区间统称为同号区间. 使函数等于零的 $x$ 值，称为函数的零点.

函数的图象在正值区间内位于 $x$ 轴的上方，在负值区间内位于 $x$ 轴的下方，在零点与 $x$ 轴相交.

例如 $x=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是 $\sin x$ 的零点. $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$ 都是 $\sin x$ 的正值区间. $(2k\pi-\pi, 2k\pi)$ 都是 $\sin x$ 的负值区间. 又如 $x=\pm\sqrt{5}$ 是 $5-x^2$ 的零点. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ 是正值区间，$(-\infty, -\sqrt{5})$ 与 $(\sqrt{5}, +\infty)$ 是负值区间.

4. 单调区间

**定义 9** 假设 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内有定义[*]，$x_1$ 及 $x_2$ 是 $(a, b)$ 内的任意两点，而且 $x_1<x_2$，如果总是 $f(x_1)<f(x_2)$，便说 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内上升. 或者说 $f(x)$ 是 $(a, b)$ 内的上升函数，$(a, b)$ 是 $f(x)$ 的上升区间. 如果总是 $f(x_1)>f(x_2)$，便说 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内下降，或者说 $f(x)$ 是 $(a, b)$ 内的下降函数，$(a, b)$ 是 $f(x)$ 的下降区间. 上升函数与下降函数合称为单调函数. 上升区间与下降区间合称为单调区间.

函数的上升与下降永远是对于区间说的. 许多函数都是在一些区间里上升，而在另一些区间里下降. 如果对于这样的函数笼统地说它是单调函数就错了. 只有当函数在它的整个定义域上单调上升或单调下降时，才可以撇开区间而说它是单调函数.

如果从左往右看函数的图象，凡在上升区间内，曲线逐渐

---

[*] 注意这种语气与“$(a, b)$ 是 $f(x)$ 的定义域”或“$f(x)$ 定义在区间 $(a, b)$ 上”不同. 这时 $(a, b)$ 一般是函数 $f(x)$ 定义域的一部分.

升高，沿着曲线移动的点好象在上坡．在下降区间内，情况恰好相反．例如$(-\infty, 0)$是$y=x^2$的下降区间，$x^2$在这里单调下降．$(0, +\infty)$是$y=x^2$的上升区间，$x^2$在这里单调上升．$(-\infty, 0)$与$(0, +\infty)$都是$x^2$的单调区间．又如$y=\sin x$的单调区间有两类．$\left(\frac{4k-1}{2}\pi, \frac{4k+1}{2}\pi\right)(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$都是上升区间，$\sin x$在这类区间里单调上升．$\left(\frac{4k+1}{2}\pi, \frac{4k+3}{2}\pi\right)(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$都是下降区间，$\sin x$在这里单调下降．

有的书把满足$f(x_1)\leqslant f(x_2)$的$f(x)$叫做单调上升函数，满足$f(x_1)\geqslant f(x_2)$的$f(x)$叫做单调下降函数．本书把前者叫做单调不降函数，后者叫做单调不升函数．

有了函数的图象，函数的同号区间、单调区间便一目了然．但是图象并不是解决这类问题的根本途径，根本途径是根据定义从数量上审辨函数的这些性质，倒是先有适当的数量分析，才能够画出合理的曲线．

【例 1】 $n$是正整数，讨论$f(x)=x^n$的上升与下降的情形．

解：先讨论$x>0$的情形．假设$0<x_1<x_2$，那么$x_1-x_2<0$．

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\cdots+x_2^{n-1}),$$

右端第二个因子$x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\cdots+x_2^{n-1}>0$，所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即是$f(x_1)<f(x_2)$．这说明$x^n$在$(0, +\infty)$内单调上升．

然后看$x<0$的情形．如果$x_1<x_2<0$，那么$0<-x_2<-x_1$．当$n$为偶数时，$x^n$是偶函数，$f(x_1)=f(-x_1)$，$f(x_2)=$

$f(-x_2)$，因此

$$f(x_1)-f(x_2)=f(-x_1)-f(-x_2).$$

根据前一步的讨论知道：$f(-x_2)-f(-x_1)<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$．这说明 $x^n$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调下降．

当 $n$ 为奇数时，$x^n$ 是奇函数，$f(x_1)=-f(-x_1)$，$f(x_2)=-f(-x_2)$；因此

$$f(x_1)-f(x_2)=f(-x_2)-f(-x_1)<0,$$

所以 $x^n$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调上升．

【例 2】 试证函数 $g(x)=x+\sin x$ 在整个数轴上单调上升．

【证】 假设 $x_1<x_2$，那么

$$g(x_1)-g(x_2)=(x_1-x_2)+\sin x_1-\sin x_2$$

$$=(x_1-x_2)\left[1+\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}\right].$$

因为 $-1<\dfrac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}<1$，$-1\leqslant\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\leqslant 1$，于是

$$-1<\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}<1,$$

进而
$$0<1+\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}<2.$$

已知 $x_1-x_2<0$，所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$．这表明 $g(x)$ 单调上升．

看了这个例题以后，读者不难自己证明：$\sin x$ 在区间 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内上升，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内下降（这里 $k$ 都是整数）.

是否一切函数都在一些区间里上升，而在另一些区间里下降呢？不！有的函数没有单调区间．例如

$$D(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 为有理数;\\ 0, & 若\ x\ 为无理数.\end{cases}$$

就没有单调区间．

**定理** 如果单调上升（下降）的函数保持符号不变，那么它的倒数是单调下降（上升）的函数．

【证】 只证函数单调上升的情形：

假设 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内单调上升，没有零点，保持符号不变．如果 $x_1$，$x_2$ 都在 $(a,\ b)$ 内，而且 $x_1<x_2$，那么 $f(x_1)<f(x_2)$ 或者

$$f(x_2)-f(x_1)>0. \tag{2.9}$$

既然 $f(x)$ 符号不变，所以 $f(x_1)f(x_2)>0$．用这正数除不等式(2.9)，得

$$\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}>0.$$

这说明 $1/f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内单调下降．∎

5．周期函数

**定义 10** 如果有一个不等于零的常数 $a$，对于函数 $f(x)$ 定义域内的一切 $x$ 值，能使等式

$$f(x+a)=f(x) \tag{2.10}$$

成立，便说 $f(x)$ 是*周期函数*．

如果 $f(x)$ 在全数轴上有定义，(2.10)式在定义域内处处成立，显然对于任何整数 $k$，一定也能使

$$f(x+ka)=f(x)$$

成立．所以 $f(x)$ 若是周期函数，可以用作(2.10)中的 $a$ 的数有无限多．

**定义 11** 在周期函数的条件(2.10)中，如果 $a$ 有最小正值，这最小正值叫做 $f(x)$ 的**最小周期**，简称**周期**．

§2.5例2中的锯齿波是周期函数，它的周期是1．图1-16的函数也是周期函数，它的周期是 $\pi$．周期函数的图象叫做**周期曲线**．周期函数的一切性质，必然按照周期而循环出现．所以讨论周期函数，只讨论它的一个周期，就能知道它在整个定义域上的情形．作周期函数的图象，也只须先画出它一个周期的曲线，其他周期都可以照描．

三角函数都是周期函数，正弦与余弦的周期都是 $2\pi$，正切与余切的周期都是 $\pi$．

## 2.10 函数的图象

前段关于函数

$$y=\sin x \tag{2.11}$$

已经陈述了许多性质．现在把这些结论集中在一起，借以说明如何从函数的性质去推测函数的图象．

(1) $\sin x$ 是奇函数，所以(2.11)的图象关于原点对称．

(2) 因为 $|\sin x|\leqslant 1$，那么函数有界，所以(2.11)的图象介于两直线 $y=\pm 1$ 之间．

(3) $\sin x$ 是周期函数，周期是 $2\pi$．所以(2.11)的图象是周期为 $2\pi$ 的周期曲线．

(4) $x=k\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$ 是零点，所以图象与 $x$ 轴交于 $(k\pi,\ 0)$ 各点．

(5) $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ 是正值区间，$(2k\pi-\pi,\ 2k\pi)$ 是负值

区间，所以图象在第一类区间里处于 $x$ 轴上方，在第二类区间里处于 $x$ 轴下方.

(6) $\left(\frac{4k-1}{2}\pi,\ \frac{4k+1}{2}\pi\right)$ 是上升区间；$\left(\frac{4k+1}{2}\pi,\ \frac{4k+3}{2}\pi\right)$ 是下降区间．所以图象在前一类区间里上升；在后一类区间里下降.

这是讨论函数的一个范例．为了认识函数的简单性质，应该对于它作这样的初步讨论．讨论的步骤大致是：

第一步：看它是偶函数还是奇函数，是否有界，有无周期.

第二步：审查它的定义域及零点.

第三步：检查它的同号区间及单调区间.

这也是画函数图象的准备工作．一般总是把讨论函数与绘制图象合并进行．每讨论一步便在图纸上按照结论作出适当的标志．例如知道函数有界，便把界线画出来，知道了零点，便把它们标在 $x$ 轴上．…

这里困难的一步，是检查函数的单调区间．按我们目前的知识，还不能很好地解答这个问题，将来会学到一种较好的方法．现在只能尽力为之.

【例】 讨论函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

解：因为 $f(-x)=\sin\left(\frac{1}{-x}\right)=-\sin\frac{1}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称.

因为对于一切实数 $x$，永远有 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 有

界，图象在两直线 $y=\pm1$ 之间（在图纸上画 $B'B$，$C'C$ 两直线表示 $y=\pm1$）．$x$ 可以取任何实数，说明图象向左右能延伸到无穷远．

$f\left(\frac{1}{k\pi}\right)=\sin k\pi=0\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，所以 0 和 $\frac{1}{k\pi}$ 都是零点$\left(\text{在 } x \text{ 轴上标出 } \frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \cdots\text{各点}\right)$．

$\frac{1}{(2k+1)\pi}<x<\frac{1}{2k\pi}$ 及 $\frac{1}{\pi}<x<+\infty$ 时，$2k\pi<\frac{1}{x}<(2k+1)\pi$ 及 $0<\frac{1}{x}<\pi$．这时 $f(x)>0$；$\frac{1}{(2k+2)\pi}<x<\frac{1}{(2k+1)\pi}$ 及 $-\infty<x<-\frac{1}{\pi}$ 时，$(2k+1)\pi<\frac{1}{x}<(2k+2)\pi$ 及 $-\pi<x<0$．这时 $f(x)<0$．

$x$ 由 $\frac{2}{(4k+1)\pi}$ 前进到 $\frac{2}{(4k-1)\pi}$ 时，$\frac{1}{x}$ 由 $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 倒退到 $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$，$\sin\frac{1}{x}$ 由 1 下降到 $-1$；$x$ 由 $\frac{2}{\pi}$ 前进到 $+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 倒退到 0，$\sin\frac{1}{x}$ 由 1 下降到 0．所以 $\left(\frac{2}{(4k+1)\pi},\ \frac{2}{(4k-1)\pi}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\pi},\ +\infty\right)$ 是 $f(x)$ 的下降区间．同理 $\left(\frac{2}{(4k+3)},\ \frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$ 及 $\left(-\infty,\ -\frac{2}{\pi}\right)$ 是 $f(x)$ 的上升

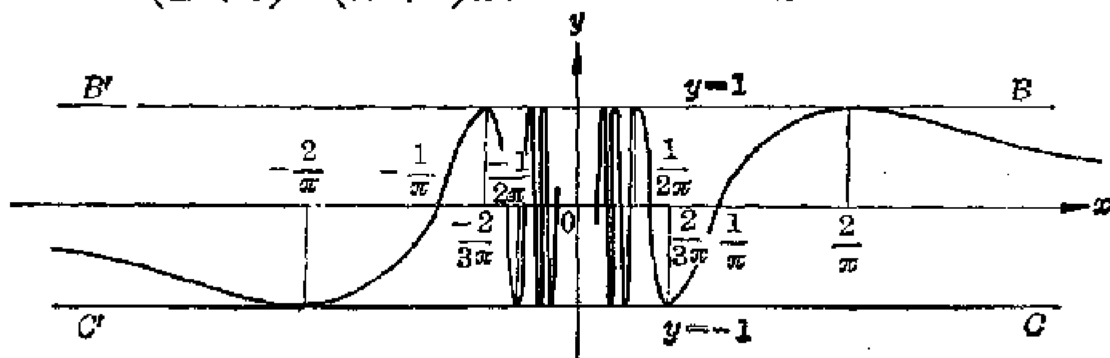


图 1-31

区间.

图 1-31 的曲线是这函数的图象.

## 习 题 五

1. 在下列函数中,指出哪个是偶函数,哪个是奇函数:

(1) $y=x^3$;　　(2) $y=x^4$;

(3) $y=2^{-x}$;

(4) $y=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0; \end{cases}$　　(5) $y=\begin{cases} x+2, & -2\leqslant x<-1, \\ 1, & -1\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2; \end{cases}$

(6) $y=|x+1|+|x-1|$.

2. 证明 $\operatorname{tg} x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内无界.

3. 证明函数 $4-x^2$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内有界.

4. 证明 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是上升函数.

5. 证明 $f(x)=x^2$ 在区间$(0, +\infty)$内上升,在区间$(-\infty, 0)$内下降.

6. 从函数

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x\leqslant -1, \\ 1-x, & -1<x\leqslant 0, \\ 1+x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2, & 1<x. \end{cases}$$

的图象说明它的单调区间和同号区间.

7. 下列各函数中,哪些是周期函数?说明它的周期:

(1) $y=\sin^2 x$;　　(2) $y=\sin x^2$;

(3) $y=\cos(x-2)$;　　(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\cos 2x$;　　(6) $y=\sin \pi x$;

(7) $y=\sin(x+1)$.

8. 证明函数 $f(x)=x-[x]$ 是周期函数,周期是 1.

9. 证明:

(1) 两个偶函数之和是偶函数,两个奇函数之和是奇函数;

(2) 两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数，一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

10. 常量函数是偶函数，还是奇函数？是否有界？证明它是周期函数.

11. 试证函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 为有理数,\\ 0, & 若\ x\ 为无理数\end{cases}$$

为偶函数. 任何有理数都是它的周期，任何无理数都不是它的周期.

12. 讨论下列各函数并且画出它们的图象:

(1) $y=-\frac{1}{x^2}$;　　(2) $y=\frac{1}{1+x^2}$;

(3) $y=\frac{x^3}{1+x^2}$;　　(4) $y=\sin x^2$;

(5) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (§ 2.6 例 3).

## 2.11 反函数

一个变化过程中的两个变量同时变化，一般很难说哪一个的变化一定是自发的，哪一个的变化是被动的. 例如圆面积与半径的变化总是同时发生，并不是半径先变，面积后变. 前边说过，面积 $A$ 是半径 $r$ 的函数:

$$A=\pi r^2. \tag{2.12}$$

那只是由于技术上的需要认为它这样，而不是本质上如此. 其实未尝不可以说半径 $r$ 因面积 $A$ 而变:

$$r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

这就把 $r$ 看作 $A$ 的函数了.

**定义 12** 用已知函数 $y=f(x)$ 的对应规律，把 $y$ 看作自变量，$x$ 看作因变量而确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

叫做$f(x)$的反函数；相对地把$f(x)$叫做直接函数.

如果$f(x)$是代数式子，有时可以从方程$y=f(x)$解$x$而得出$\varphi(y)$来，但是一般来说未必能解出$x$来，比如§2.9例2的函数就这样. 另一方面可能不止有一个$\varphi(x)$. 例如撇开几何意义而单从方程(2.12)解$r$的话，应该有两个结果

$$r=\pm\sqrt{\frac{A}{\pi}},$$

这就是说有两个反函数. 两者的定义域都是函数(2.12)的值域: $0\leqslant A<+\infty$.

从直接函数的图象来看，如果曲线连续，而任意一条平行于$x$轴的直线与$y=f(x)$的图象最多有$k$个交点，那么便有$k$个反函数. 例如假定图1-32所画的曲线$ABCD$是函数$y=f(x)$的图象. 直线$y=p$和曲线能交于$P$、$Q$、$R$三点(最多). 这表示对于$y$的每个值，有$x$的三个值和它对应，所以应该有三个反函数. 每个反函数的自变量分别是$AB$、$CB$、$CD$三段曲线上的点的纵坐标，因变量则是横坐标. 如果$B$、$C$的纵坐标是$k$和$h$，那么这三个反函数的定义域便是区间$-\infty<y\leqslant k$, $h\leqslant y\leqslant k$, $h\leqslant y<+\infty$. 这样看来，可以概括地说：连续函数$y=f(x)$有几个单调区间，就有几个反函数.

【例1】 求下列函数的反函数：

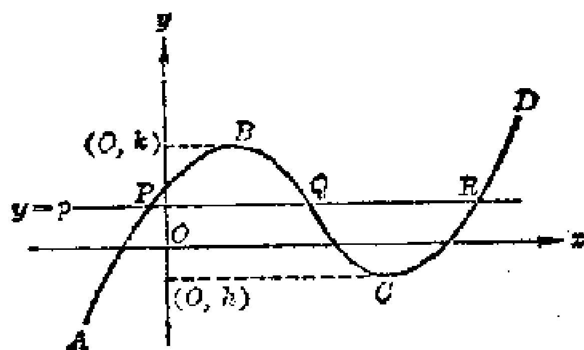


图 1-32

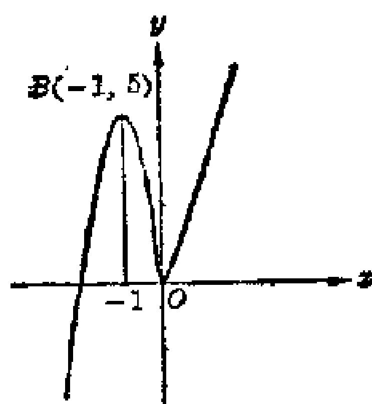


图 1-33

$$y=f(x)=\begin{cases}-5x^2-10x, & x\leqslant 0;\\ 3x, & x>0.\end{cases} \qquad (2.13)$$

解：当 $x\leqslant 0$ 时，

$$f(x)=5-5(x+1)^2\leqslant 5,$$

$f(-1)=5$. 因而 $B(-1, 5)$是曲线的一个峰顶(图 1-33)．所以曲线在$(-\infty, -1)$内上升，在$(-1, 0)$内下降．显然在$(0, +\infty)$内又上升．函数有三个单调区间，应该有三个反函数．

由方程 $y=-5x^2-10x$ 解 $x$，得

$$x=\frac{-5\mp\sqrt{25-5y}}{5}=-1\mp\sqrt{1-y/5}.$$

所以三个反函数是

$$x=-1-\sqrt{1-y/5},\ -\infty<y\leqslant 5, \qquad (2.14)$$

$$x=-1+\sqrt{1-y/5},\ 0\leqslant y\leqslant 5, \qquad (2.15)$$

$$x=\frac{1}{3}y,\quad 0<y. \qquad (2.16)$$

这里出现的问题是：反函数多于一个时，要哪一个？在实际问题中，要合于实用的那一个．但在函数没有实指的时候，则应该都考虑．但是这又发生问题了：$y=\sin x$ 的单调区间无穷多，那么反正弦函数岂不应该也有无穷多？对的，应该是无穷多个．通常把 $x=\arcsin y$ 的因变量 $x$ 限在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$之内，仅仅是便于使用的一个反函数．其他反三角函数同样有这问题．

反函数的自变量与因变量，就是直接函数的因变量与自变量．两个变量互相对应着的一组一组的数并没有打乱，只是把对应同被对应的地位交换了而已．从图象来说，变数 $x$ 还是沿着横轴来取，变数 $y$ 仍旧沿着纵轴来取．只是按反函

数来看待两个变量的对应关系时，我们心里要记住这时纵轴是自变量的轴，而横轴是因变量的轴，所以直接函数与反函数实际上反映同一个图象.

讨论函数的习惯，都是用 $x$ 作自变量，用 $y$ 作因变量. 前面所说的 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 与习惯不合，所以又往往把反函数 $x=\varphi(y)$ 里的 $x$ 与 $y$ 对调过来，改作

$$y=\varphi(x)$$

然后说这是 $y=f(x)$ 的反函数. 例如把(2.14)、(2.15)、(2.16)里的 $x$、$y$ 对调了，改作

$$y=-1-\sqrt{1-x/5},\ -\infty<x\leqslant 5,$$
$$y=-1+\sqrt{1-x/5},\ 0\leqslant x\leqslant 5,$$
$$y=\frac{1}{3}x,\ 0<x.$$

然后说这三个函数是(2.13)的反函数. 这当然和原来的 $x=\varphi(y)$ 形状不同. 为了便于区别，本书说 $x=\varphi(y)$ 是*本义反函数*，$y=\varphi(x)$ 是*矫形反函数*. 当然一个单调函数的反函数只有一个，所谓本义反函数与矫形反函数仅仅是一个反函数的两种表示方法，不要错以为一个单调函数有两个反函数.

本义反函数的图象上有一点 $(a,\ b)$，矫形反函数的图象必有一点 $(b,\ a)$. 这两点关于直线 $y=x$ 对称. 所以矫形反函数的图象与本义反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称. 也就是矫形反函数的图象与直接函数的图象关于第一第三两象限的角平分线对称. 如果画图象的纸是透明的，先画好了直接函数的图象，然后把图纸绕着直线 $y=x$ 转 $180°$，将纸面上下翻过来，这时原来的纵轴变成了 $x$ 轴；原来的横轴变成了 $y$ 轴，而原来 $y=f(x)$ 的曲线就变为 $y=\varphi(x)$ 的曲线.

【例 2】 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的本义反函数是 $x=\pm 2\sqrt{y}$，矫形反函数是 $y=\pm 2\sqrt{x}$. 图象如图 1-34 所示.

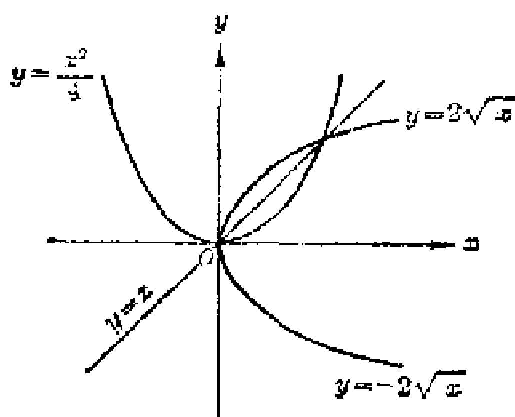



图 1-34

为什么要这样两种反函数呢？因为它们各有各的应用价值. 值得专题讨论的反函数，如反三角函数、对数函数等，自然应该用矫形反函数表示. 而在某个问题中，暂时用一下的反函数，便不必用矫形反函数，而用本义反函数即可.

【例 3】 求 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 及 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 的矫形反函数（这里 $e$ 是自然对数的底）.

解：由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0.$$

以 $e^x$ 为未知数，解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，舍去负根 $y-\sqrt{y^2+1}$，取对数

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

改为矫形反函数便是

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

由 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 得 $e^{2x}-2ye^x+1=0$. 完全和上边一样，

解得 $x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$. 变为矫形反函数便是

$$y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}).$$

**定理** 假设直接函数 $y=f(x)$ 的曲线是 $L$(图 1-32)，它的矫形反函数 $y=\varphi(x)$ 的曲线是 $L'$. 如果 $AB(BC)$ 是 $L$ 上单调上升(下降)的一段曲线，那么 $L'$ 上和它对应的那段曲线一定也是单调上升(下降)的.

详细一点说，即是：如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内由 $c$ 单调上升到 $d$，那么 $\varphi(x)$ 便在区间 $(c, d)$ 内由 $a$ 单调上升到 $b$. 如果 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内由 $c$ 单调下降到 $d$，那么 $\varphi(x)$ 便在区间 $(d, c)$ 内由 $b$ 单调下降到 $a$.

【证】 假设 $(x_1, y_1)$ 与 $(x_2, y_2)$ 是一条曲线同一个单调区间里的两点. 那么根据 § 2.9 单调函数的定义，这曲线所代表的函数单调上升，必然且只需

$$(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0; \tag{2.17}$$

函数单调下降，必然且只需

$$(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0. \tag{2.18}$$

现在假设 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内单调上升，$x_1$, $x_2$ 属于 $(a, b)$，$y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$，必然(2.17)式成立. 但是，这时 $y_1$, $y_2$ 属于区间 $(c, d)$，$x_1=\varphi(y_1)$，$x_2=\varphi(y_2)$. 于是 (2.17) 又是 $\varphi(y)$ 单调上升的充分条件.

单调下降的情形，用不等式(2.18)证明. ▌

## 2.12 多元函数

先看一个例子，一定质量的气体，它的压强 $P$ 对于体积 $V$ 及温度 $T$ 的依从关系是

$$P=\frac{CT}{V} \tag{2.19}$$

其中 $C$ 是常数．长方体的体积 $V$ 对于长度 $a$、宽度 $b$ 及高度 $c$ 的依从关系是

$$V=abc. \tag{2.20}$$

在(2.19)里 $T$ 或 $V$ 的变化，都会引起 $P$ 的变化，$P$ 是 $T$ 与 $V$ 两个自变量的函数．在(2.20)里 $a$、$b$、$c$ 三者任何一个的变化都能使 $V$ 改变，$V$ 是 $a$、$b$、$c$ 三个自变量的函数．

**定义 13** 如果对于 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的每组值，变量 $y$ 必有确定的对应值，便说 $y$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为自变量，$y$ 称为因变量．因为有 $n$ 个自变量，所以称 $y$ 是 *$n$ 元函数*．

详细地说，有两个自变量的函数称为*二元函数*，有三个自变量的函数称为*三元函数*，如此类推，笼统地说：凡自变量多于一个的函数就叫做*多元函数*．相对地说，以前讲的只有一个自变量的函数叫做*一元函数*．多元函数用

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

等符号表示．如果以 $x$、$y$ 为自变量，$z$ 为因变量，就记作 $z=f(x, y)$；以 $x$、$y$、$z$ 为自变量的函数 $u$，就记作 $u=f(x, y, z)$．多元函数符号的其他用途，和一元函数的情形一样．例如 $f(5, 3, -2)$ 表示函数 $f(x, y, z)$ 在 $x=5$, $y=3$, $z=-2$ 时的值．

一元函数的微分学与一元函数的积分学只讨论一元函数的问题．多元函数是多元函数微积分研究的对象；现在不作深入的讨论．

## 习 题 六

1．求 $y=f(x)=2x-3$ 在区间[1, 5]内的反函数，并且画这两个函数的图象．

2. 求习题四里第2、第9两题答案的反函数.

3. 求 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的矫形反函数. $a$、$b$、$c$、$d$ 有什么关系时反函数与直接函数完全相同?

4. 试证 $y=x^2-x$ 是 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$ 的矫形反函数. 检查这两个函数的定义域与值域.

5. 把本义反函数代入直接函数,得什么结果?

6. 求 $z=\left[\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right]^2$ 在 $x=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ 和 $y=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ 时的值.

7. 设 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$, 求 $f(tx, ty)$.

# 第三节 初等函数

## 3.1 基本初等函数

有一类函数叫做初等函数,它们的实用价值很大,在探讨函数的分析方法时,经常用它们作样品. 为了以后的应用,必须先把它们提出来特别介绍一下.

一切初等函数都是由有限个基本初等函数构成的, 所以必须先讲基本初等函数. 基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 下面按次序逐个地介绍它们.

## 3.2 幂函数

幂函数指的是形式为

$$y=x^{\alpha}$$

的函数,其中 $\alpha$ 是固定的实数. 无论 $\alpha$ 是什么实数,函数的图象都通过点(1, 1).

1. $\alpha$ 是正整数 $n$

函数

$$y=x^n$$

在整个数轴上有定义. §2.9 例 1 已经讨论了它的奇偶性和单调区间. 图 1-35 画了 $n=1, 2, 3$ 时的三个图象. $n=1$ 时是直线, $n=2$ 时是抛物线, $n=3$ 时的曲线叫做立方抛物线.

在区间 $(-1, 1)$ 内, $n$ 越大, 曲线靠近原点的部分越平越接近于 $x$ 轴. 在 $(-1, 1)$ 以外, $n$ 越大曲线越陡.

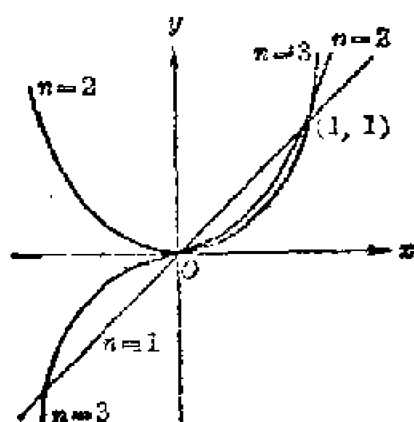



图 1-35

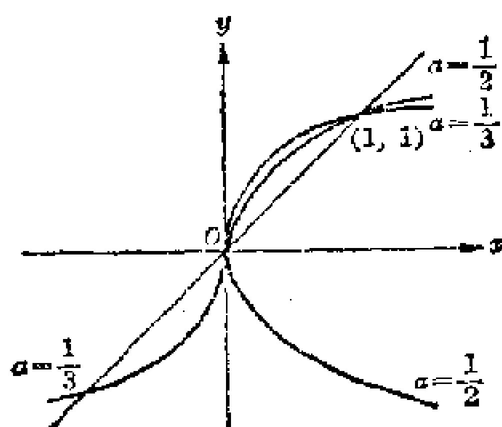



图 1-36

附注 读者可以借反函数的性质推测 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 的图象. 参阅图 1-36.

2. $\alpha$ 是负整数 $-n(n>0)$

这时函数是

$$y=\frac{1}{x^n}.$$

它只在 $x=0$ 时无定义. 在 $n$ 是偶数时, $\frac{1}{x^n}$ 是偶函数, 永远 $y>0$, 曲线在 $x$ 轴上方, 关于 $y$ 轴对称. 在 $(-\infty, 0)$ 内, 由于 $x^n$ 单调下降, 可知 $\frac{1}{x^n}$ 单调上升 (§2.9 定理). 同理在 $(0, +\infty)$

内，$\frac{1}{x^n}$单调下降．$n$为奇数时，$\frac{1}{x^n}$是奇函数，图象关于原点对称．在$(-\infty, 0)$内$y<0$；在$(0, +\infty)$内$y>0$．在两个区间里$\frac{1}{x^n}$都单调下降（读者补证）．在区间$(-1, 0)$及$(0, 1)$内，$n$逐渐增大时，曲线逐渐变陡；在$(-\infty, -1)$及$(1, +\infty)$内，$n$逐渐增大时，曲线逐渐向$x$轴靠近．

图 1-37 画了$\alpha=-1, -2, -3$的三个图象．

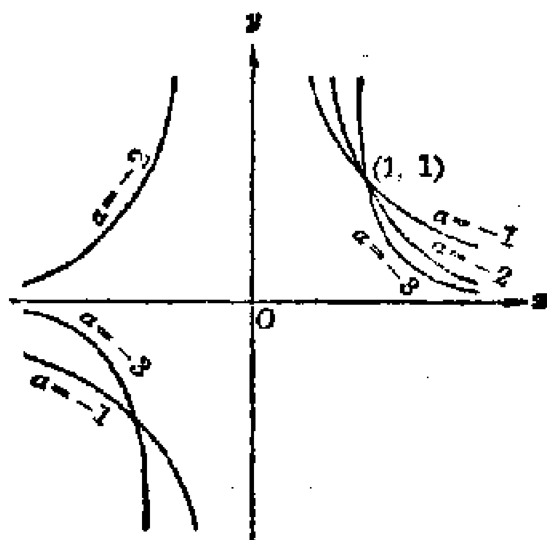


图 1-37

3．$\alpha$是有理数$p/q$

这里$p, q$是整数，$q>0$．按照分指数的定义

$$x^{p/q}=(\sqrt[q]{x})^p$$

对于一切非负数$x$都有确定的意义．然而当$x<0$时，有许多不能排除的麻烦．当$\alpha$是无理数时，问题更复杂．所以在许多书中对于幂函数$x^\alpha$一概规定$x\geqslant 0$．本书规定$\alpha$是正负整数时，允许$x$是负数，其余情形也只允许$x\geqslant 0$．

先讨论$p/q>0$的情形，在这里又先讨论$p/q>1$的情形：假定$0<x_1<x_2$，那么$x_1^{p/q}<x_2^{p/q}$，函数在$(0, +\infty)$内单调上升．在区间$(0, 1)$内曲线位于直线$y=x$之下，$p/q$越大，曲线越低；在区间$(1, +\infty)$内，曲线位于直线$y=x$之上，$p/q$越大，曲线越高．图象与图 1-35 所画的曲线相似．

当$0<p/q<1$时，$y=x^{p/q}$的矫形反函数是$y=x^{q/p}(q/p>1)$，两者的图象关于$y=x$对称．所以$y=x^{p/q}$的曲线与图 1-36 所画的曲线相似．

$\alpha=p/q<0$ 时，$x^{\alpha}$ 在$(0, +\infty)$内单调下降．曲线弯曲的形状与图 1-37 中第一象限的曲线相似．

4．$\alpha$ 是无理数

这时 $x^{\alpha}$ 的概念和性质都很复杂．现在只能说，如果 $\alpha$ 与有理数 $r$ 很接近时，那么 $x^{\alpha}$ 的图象也和 $x^{r}$ 的图象很接近．

总括起来说，$x^{\alpha}$ 在第一象限的图象，按 $\alpha$ 的正负分两类：$\alpha>0$ 时，又按 $\alpha$ 大于或小于 1 分两种形式．$\alpha>1$ 时，曲线象图 1-35 的曲线；$0<\alpha<1$ 时，曲线象图 1-36 的曲线；$\alpha<0$ 时，图象与图 1-37 中第一象限的部分相似．

## 3.3 指数函数

假设常数 $a>0$，形状为

$$y=a^{x}$$

的函数叫做指数函数．$a=1$ 时，$y$ 等于常数 1，通常说指数函数时，往往撇开这种情形．

$a^{x}$ 对于一切实数 $x$ 有意义，定义域是整个 $x$ 轴．不论 $x$ 是什么实数，永远 $y>0$，图象只能在 $x$ 轴上方．这种情形就说函数有下界，$y=0$ 是它的下界．

不论 $a$ 是什么正数，$y|_{x=0}=1$，所以图象一定通过$(0, 1)$点．

假设 $x_1<x_2$，那么 $a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_1}(1-a^{x_2-x_1})$．因为 $x_2-x_1>0$，如果 $a>1$，那么 $a^{x_2-x_1}>1$，从而 $1-a^{x_2-x_1}<0$，又从而 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$，就是永远 $a^{x_1}<a^{x_2}$．所以函数在整个数轴上单调上升．同理当 $a<1$ 时，函数单调下降．

$a>1$ 时，曲线在左方趋近 $x$ 轴；$a<1$ 时，曲线在右方趋近 $x$ 轴，所以 $x$ 轴是 $y=a^{x}$ 的渐近线．

如果 $1<a<b$，则当 $x>0$ 时，$a^{x}<b^{x}$，曲线 $y=b^{x}$ 在曲线

$y=a^x$ 之上；$x<0$ 时，$a^x>b^x$，曲线 $y=b^x$ 在曲线 $y=a^x$ 之下．如果 $0<a<b<1$，情况正好相反．这说明 $a$ 从大于 1 的数逐渐变小时，曲线 $y=a^x$ 的左半(第二象限里的部分)逐渐升高，右半逐渐降低，整个曲线逐渐平直．到 $a=1$ 时，变成水平直线．如果 $a$ 继续变小，左半逐渐翘起，右半继续下降，变成单调下降曲线．有趣的是，由于 $\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，而 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ (即 $y=a^{-x}$)的曲线关于 $y$ 轴对称．

图 1-38 画了 $a^x$，$\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 和 $b^x$ 的图象，其中认为 $1<a<b$．指数函数的图象叫做指数曲线．

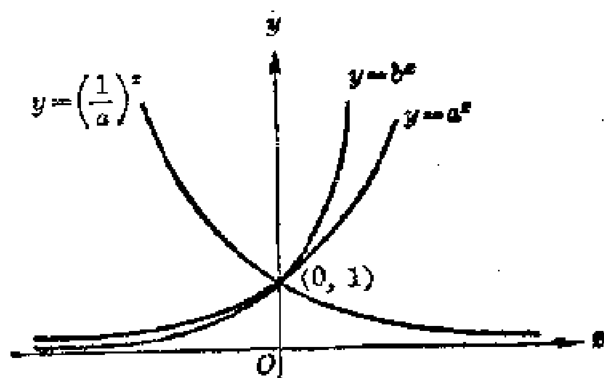



图 1-38

**附注** 时常需要我们判断同一个正数的不同次方幂谁大谁小；不同的两正数的同次方幂谁大谁小．指数曲线能帮助我们很快地回答这两个问题．不论 $p$ 与 $q$ 谁正谁负，只要 $p<q$(代数地)，则

当 $a>1$ 时，$a^p<a^q$　($a^x$ 单调上升)；

当 $a<1$ 时，$a^p>a^q$　($a^x$ 单调下降)．

若 $0<a<b$，则

当 $x>0$ 时，$a^x<b^x$　(从右半曲线比较)；

当 $x<0$ 时，$a^x>b^x$　(从左半曲线比较)．

以后用得较多的指数函数是

$$y=e^x,$$

这里$e=2.71828\cdots$是自然对数的底.

## 3.4 对数函数

指数函数$y=a^x$的矫形反函数叫做对数函数，记作

$$y=\log_a x.$$

$a$叫做对数的底，$0<a\neq1$．指数函数的值域$(0,+\infty)$是对数函数的定义域．指数函数的定义域$(-\infty,+\infty)$是对数函数的值域．图象可以按反函数的关系从图1-38转置过来，叫做对数曲线．

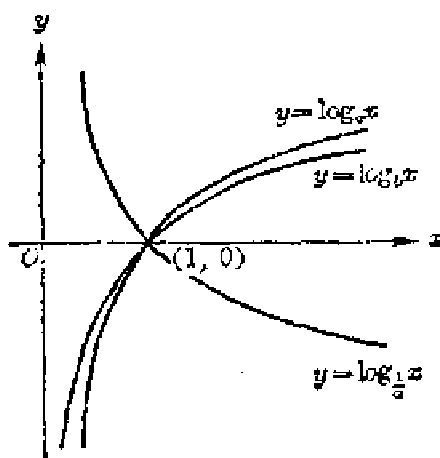



图 1-39

对数曲线一定通过(1, 0)点．$a>1$时单调上升；$a<1$时单调下降．都以$y$轴为渐近线．底大于1时，底越大，曲线在点(1, 0)以右的部分越低，以左的部分越高．底小于1时，情形与此相反．

$y=\log_a x$与$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的曲线关于$x$轴对称．图1-39中画了底为$a$，$\frac{1}{a}$和$b$的对数曲线，其中认为$1<a<b$.

实际计算中，习惯上用常用对数．这种对数以10为底，记号是lg，有详细的函数表可查．以后我们多半用自然对数，即是以$e$为底的对数，也叫做讷伯尔对数，记号是ln.

假设$a$、$b$是不同的两个正数，并且

$$a^p=b, \tag{3.1}$$

那么 $p=\log_a b$. 在(3.1)的两端以 $b$ 为底取对数，得 $p\log_b a=1$，即是

$$\log_a b\cdot\log_b a=1. \tag{3.2}$$

借这个基本关系，可以把用 $a$ 作底的对数变成用 $b$ 作底的对数. 这叫做对数换底. 假设

$$\log_a x=p,$$

那么

$$x=a^p.$$

以 $b$ 为底两端取对数，得

$$\log_b x=p\log_b a=\log_b a\cdot\log_a x,$$

根据(3.2)，得

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{3.3}$$

这表示 $y=\log_b x$ 与 $y=\log_a x$ 之值只差一个常数因子. 把曲线 $y=\log_a x$ 的点的纵坐标乘以 $\frac{1}{\log_a b}$，便是曲线 $\log_b x$ 上对应于同一横坐标的点的纵坐标. 可以借助 $y=\log_a x$ 的曲线画 $y=\log_b x$ 的曲线. 特别地，取 $a=10$, $b=e$, (3.3)就变为

$$\ln x=\frac{\lg x}{\lg e}\approx\frac{\lg x}{0.4343}=2.3026\lg x.$$

这是从常用对数到自然对数的换算公式. 把曲线 $y=\lg x$ 上

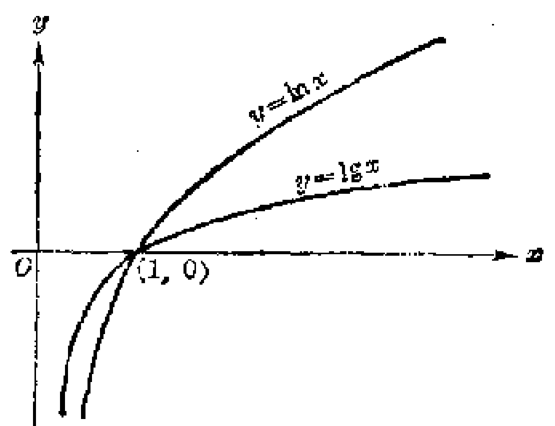



图 1-40

每点的纵坐标放大到2.3026倍，便可以得到$y=\ln x$的曲线（图1-40）.

## 习　题　七

1. 画下列各函数的图象：

   (1) $y=ax+b$，取$a=1$，$b=2$及$a=-1$，$b=-1$；

   (2) $y=|x|$；

   (3) $y=-|x-2|$；

   (4) $y=x^n$，取$n=\frac{1}{2}$，$n=-\frac{1}{2}$　$(x>0)$；

   (5) $y=a^x$，取$a=2$，$a=\frac{1}{2}$；

   (6) $y=2^{ax}$，取$a=1$，$a=-1$；

   (7) $y=\lg ax$　取$a=2$，$a=-2$；

   (8) $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$　$(x\neq 0)$；

   (9) $y=a^{\log_a x}$.

2. 若$f(x)=a^x$，证明等式

$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y).$$

3. 求证两个定数的对数之比对于任何底都一样.

4. 已知$\log_a x$，$\log_b x$，$\log_c x$，求$\log_{(a\cdot b\cdot c)} x$.

## 3.5　三角函数

中学的三角课本里讲过四个三角函数，即是$\sin x$、$\cos x$、$\mathrm{tg}\, x$、$\mathrm{ctg}\, x$. 我们应当熟悉这四个函数的定义. 图1-41中圆$O$是单位圆（半径等于单位长），$\angle AOP=x$，$OB$与$CP$都垂直于$OA$. $AT$，$BS$分别切圆于$A$、$B$，交$OP$于$T$、$S$，这时

$$\sin x=CP,\ \cos x=OC,$$

$$\mathrm{tg}\, x=AT,\ \mathrm{ctg}\, x=BS.$$

为了以后的方便，现在再补充两个三角函数：

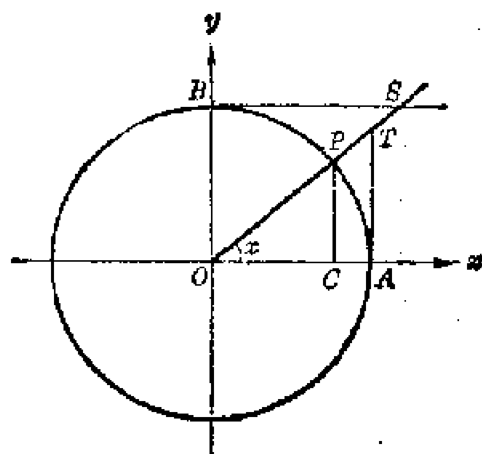



图 1-41

$$\sec x = OT, \quad \csc x = OS.$$

前者叫做 $x$ 的正割，后者叫做 $x$ 的余割(数理化自学丛书的《三角》里有这两个函数)．因为 $OA=OB=OP=1$，显然

$$\sec x = \frac{OT}{OA} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{\cos x},$$
$$\csc x = \frac{OS}{OB} = \frac{OP}{CP} = \frac{1}{\sin x}.$$

这两者和 $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ 合称为三角函数间的倒数关系．此外还有三个重要的勾股关系：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x;$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x$$

和比值关系：

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

在实际计算中，习惯上都用六十分制度量角．今后我们多半用弧度作为量角的单位．一弧度是圆周上长度等于半径的弧所对的圆心角．

$$1\text{ 弧度}=\frac{360^\circ}{2\pi}\approx 57^\circ 17' 44.8''.$$

如果用半径作长度单位，用弧度作角的单位，圆心角和它所对的弧长便有相同的量数，所以 $x$ 又是单位圆上的弧长，于是三角函数又可以说是单位圆上的弧的函数．这时候三角函数的自变量与因变量便有共同单位的线长．画三角函数的图象，若是按弧长沿着 $x$ 轴取点的横坐标，虽然可以因为长度单位不同而大小不同，但是曲线总是相似的．

§2.10 已经说过 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的图象．这里不再重复．图 1-42 画的是 $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的图象．这两个函数都以 $\pi$ 为周期．$\operatorname{tg} x$ 在 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 无定义，$k\pi$ 是零点，在每个区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调上升．$\operatorname{ctg} x$ 在 $x=k\pi$ 无定义，$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 是零点，在每个区间 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内单调下降．

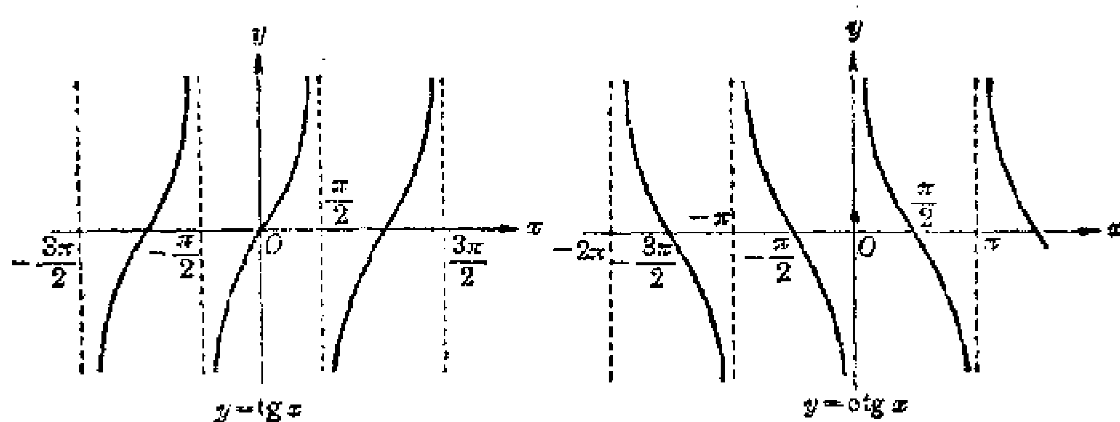



图 1-42

## 3.6 反三角函数

先回忆一下 §2.11 关于反函数的定理．直接函数 $y=$

$f(x)$与矫形反函数 $y=\varphi(x)$ 的上升与下降永远是一致的．直接函数的每个单调区间对应着一个反函数．

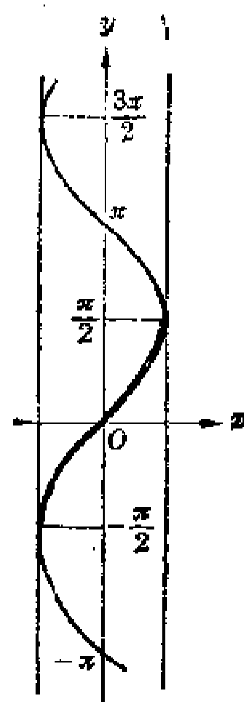


图 1-43

从 $y=\sin x$ 的图象很容易翻转成反正弦的图象(图 1-43)，这曲线局限在 $x=\pm1$ 两直线之间，所以反正弦的定义域只有 $[-1, 1]$．反函数无穷多，问题是怎样给它们整理出一个头绪来．

$\sin x$ 的单调区间有两类：

$$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \qquad (3.4)$$

都是上升区间；

$$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \qquad (3.5)$$

都是下降区间．每个区间有一个反函数，而同类区间里的不同反函数只差 $2\pi$ 的一个倍数，所以先取(3.4)中的 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 和(3.5)中的 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$，看看两个反函数的关系，$\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 里从 $-1$ 上升到 1；在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 里从 1 下降到 $-1$．所以第一个反函数在 $[-1, 1]$ 里从 $-\frac{\pi}{2}$ 上升到 $\frac{\pi}{2}$；第二个反函数在 $[-1, 1]$ 里从 $\frac{3\pi}{2}$ 下降到 $\frac{\pi}{2}$．暂且把第一个本义反函数记作 $x=\varphi_1(y)$；第二个记作 $x=\varphi_2(y)$．我们知道

$$\sin x=y=\sin(\pi-x) \qquad (3.6)$$

永远成立．如果 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，那么 $\frac{3\pi}{2}\geqslant\pi-x\geqslant\frac{\pi}{2}$．这两个

数集恰好与两个反函数的值域相符．于是由 (3.6) 的第一等式得

$$x=\varphi_1(y),\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

那么从第二等式得

$$\pi-x=\varphi_2(y),\ \frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{3\pi}{2};\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

所以 $\qquad \varphi_2(y)=\pi-\varphi_1(y),\ -1\leqslant y\leqslant 1.$

改用矫形反函数来写，便是

$$\varphi_2(x)=\pi-\varphi_1(x),\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

现在把第一个矫形反函数记作

$$y=\arcsin x,\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (3.7)$$

第二个矫形反函数就应该写作

$$y=\pi-\arcsin x.$$

进而在(3.4)与(3.5)中诸区间内的反函数分别是

$$y=2k\pi+\arcsin x \quad 与 \quad y=(2k+1)\pi-\arcsin x,$$

其中 $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$．再把这两组反函数归纳成一个式子：

$$y=n\pi+(-1)^n\arcsin x \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \quad (3.8)$$

(3.7)叫做反正弦函数的主值，它的图象是图 1-43 里的粗线部分；(3.8)叫做反正弦函数的通值．通值用 $\operatorname{Arc\,sin} x$ 表示．由此(3.8)式就变为

$$\operatorname{Arc\,sin} x=n\pi+(-1)^n\arcsin x \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \qquad (3.9)$$

$\arcsin x$读作“$x$ 的反正弦”，为了便于理解，可以读作“以 $x$ 为正弦的角”．“arc”的本义是弧，所以 $\arcsin x$ 也可以读作“以 $x$ 为正弦的弧”．

图 1-44 是反余弦函数的图象．讨论它的方法和前面一样，现在只把结果写出来．它的主值记作

$$y=\operatorname{arc}\cos x,\ -1\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant \pi.$$

图 1-44 中粗线部分的曲线是它的图象，在区间$[-1, 1]$内它从$\pi$下降到 0．通值是

$$\operatorname{Arc}\cos x=2n\pi\pm\operatorname{arc}\cos x$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).\quad(3.10)$$

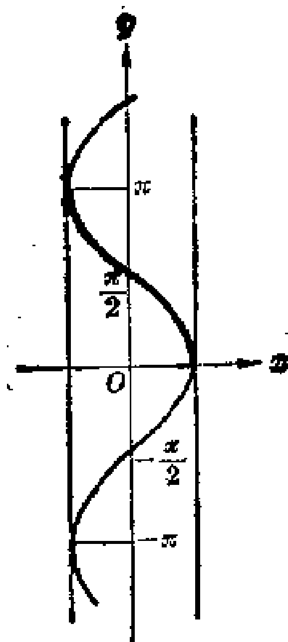


图 1-44

对应于加号的反余弦都单调下降，从$(2n+1)\pi$ 下降到 $2n\pi$；对应于减号的反余弦都单调上升，从$(2n-1)\pi$ 上升到 $2n\pi$．

以上讨论，由读者补充理由．

(3.9)，(3.10)两式所写的通值，都是用一个记号代表许多函数的值．这样写的函数，叫做*多值函数*．相对地说，以前所讲的对于自变量的每个值仅有一个对应值的函数，叫做*单值函数*．多值性是反三角函数的麻烦事，而规定主值就是为了解除这点困难．凡当求反三角函数时，先在主值范围内$\left(\text{反正弦在}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\text{内；反余弦在}[0, \pi]\text{内}\right)$找一个角，这一步工作，一般是查函数表(特殊的可记得住的角就不必查表)，把找到的主值填入公式(3.9)或(3.10)之内，便得到通值．

【例 1】 由 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，知道 $\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$，代入通值公式，得

$$\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

如果问 $\arcsin(-0.4014)$ 等于什么？要先想什么角的正弦等于 $-0.4014$. 从正弦表里查得 $23°40'$ 的正弦等于 $0.4014$，所以 $-23°40'$ 即是所要的主值，也即是

$$\arcsin(-0.4014)=-23°40'.$$

代入通值公式，得

$$\operatorname{Arc}\sin(-0.4014)=n\times 360°-(-1)^n 23°40'.$$

【例 2】 解下列方程求 $x$：

$$4\cos^2 x-2(\sqrt{3}-1)\cos x-\sqrt{3}=0.$$

解：以 $\cos x$ 为未知数，解得

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}-1\pm(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}.$$

由 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $x=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. 主值是 $\frac{\pi}{6}$，通值是

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}; \tag{3.11}$$

由 $\cos x=-\frac{1}{2}$，得 $x=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. 主值是 $\frac{2\pi}{3}$，通值是

$$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}. \tag{3.12}$$

(3.11)、(3.12)两式合在一起便是本方程的答案.

在反三角函数的概念里，要注意自变量是实数，而函数值是角(或单位圆的弧长)；其次注意反三角函数的定义域，自变量的值不能越出相应直接函数的值域；第三注意自变量的值与因变量的值的配伍关系. 例如

$$90°=\arcsin\frac{\pi}{2};\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\arccos\frac{\pi}{6} \tag{3.13}$$

都是错的. 由于 $\frac{\pi}{2}>1$ 超出了 $\arcsin x$ 的定义域 $|x|\leqslant 1$，所

以第一个等式是错的;第二个等式里 $0<\frac{\pi}{6}<1$, 固然 $\operatorname{arc}\cos\frac{\pi}{6}$ 有意义, 但它不等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$(弧度). 这是自变量与因变量的配伍不对. 从根本上说, 应当注意反函数与直接函数的基本关系,即是

$$a=\operatorname{arc}\sin b \Leftrightarrow \sin a=b,$$

$$a=\operatorname{arc}\cos b \Leftrightarrow \cos a=b.$$

经常用这关系检查我们的工作, 就可以少出错误. 比如把(3.13)的两个等式翻译成

$$\sin 90^\circ=\frac{\pi}{2};\quad \cos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},$$

就会发现错误.

$x$ 与 $\operatorname{arc}\sin x$(或 $\operatorname{arc}\cos x$)的配伍关系, 由 $x$ 与 $\sin x$(或 $\cos x$)的配伍关系而来. 后者的依据是三角函数表;所以前者的依据也是三角函数表. 从前讲三角函数时, 是由角查函数的值,现在是由函数值查角.

因为 $\operatorname{tg} x$ 在

$$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)\qquad (3.14)$$

的每个区间里, 从 $-\infty$ 单调上升到 $+\infty$, 所以反正切在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内单调上升, 对应于(3.14)的每个区间有一个反函数. 取值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数作主值,记作

$$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x,\quad -\infty<x<+\infty,\quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}.$$

其他反函数概括在通值公式

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x=k\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots;\ -\infty<x<+\infty)$$

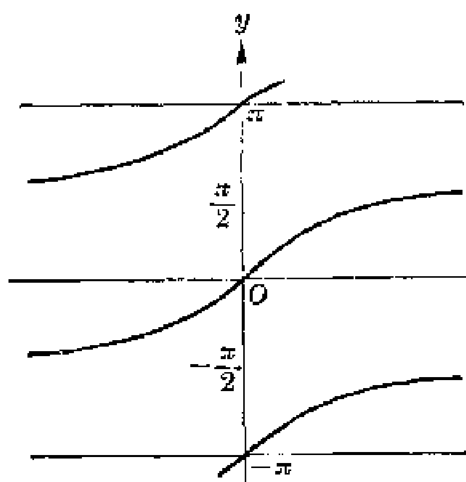


图 1-45

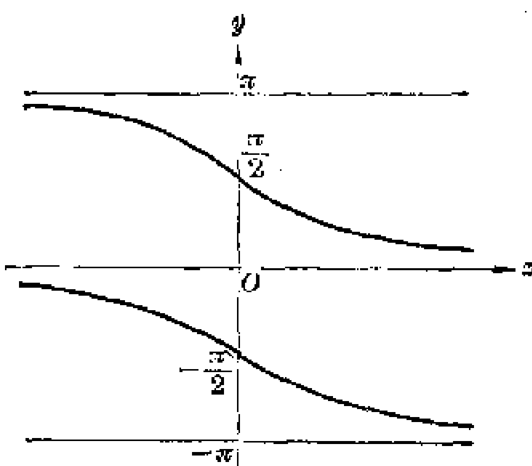


图 1-46

之中(图 1-45).

因为 $\operatorname{ctg} x$ 在

$$(k\pi,\ k\pi+\pi)\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)\qquad(3.15)$$

的每个区间里从 $+\infty$ 单调下降到 $-\infty$，所以反余切在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内单调下降. 对应于 (3.15) 的每个区间有一个反函数. 取值域为 $(0,\ \pi)$ 的反函数为主值，记作

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x,\ -\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi.$$

其他一切反函数概括在通值公式

$$\operatorname{Arc\,ctg} x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg} x$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots;\ -\infty<x<+\infty)$$

之中(图 1-46).

【例 3】 试证 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

解：设 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=u$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=v$，那么 $\operatorname{tg} u=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} v=\frac{1}{3}$. 于是

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\cdot\operatorname{tg}v}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

由此 $\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=u+v=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4}.$

**附注** 这里两个反正切都是主值，如果都用通值行吗？

## 习 题 八

1．找一个具体的 $\theta$ 值，使 $\sin 2\theta$ 不等于 $2\sin\theta$．为什么说 $\sin 2\theta=2\sin\theta$ 不合理？

2．$\theta$ 取什么值时，下列等式成立？

(1) $\sin\theta=\cos\theta$; (2) $\sin\theta\cos\theta=0$;

(3) $\sec\theta=0$; (4) $5\sin 3\theta=0$.

3．试证 $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. 这两个公式和 $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$, $\cos 2x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}$ 有什么相同？有什么不同？

4．试证 $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$, $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$. 这两个公式和 $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ 有什么相同？有什么不同？

5．把 $\cos^8x$, $\sin^8x$ 化成 $\cos 2x$, $\cos 4x$, $\cos 8x$ 的奇次幂的多项式。

6．如果 $|h|$ 很小，证明

$$\sin(x+h)-\sin x\approx h\cos x;$$
$$\cos(x+h)-\cos x\approx -h\sin x.$$

按照 $h$ 的正负号和 $x$ 所在的象限，一个一个地检验，这两个近似等式是否正确？

[提示：在单位圆里 $|h|$ 很小时，可以把它的对弦看作对弧，当然要按照 $h$ 的正负赋予这弦以相应的符号.]

7. 证明下列等式:

(1) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(2) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$;

(3) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $-\infty<x<+\infty$.

8. 证明

(1) $\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg} x$;

(2) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\dfrac{\pi}{2}$.

## 3.7 函数的运算

详细地论述基本初等函数，是为了更好地认识另外的函数. 有许多函数是由基本初等函数经过加、减、乘、除构成的. 由四则运算构成新函数的过程叫做**函数的运算**. 两个函数作运算时，要注意新旧函数的定义域. 新函数的定义域，必须在两个旧函数的定义域的公共部分之内. 两个旧函数必须都有定义时，才能相加或相乘. 两个函数相除时，还必须剔去除式的零点.

【例 1】 $ax+b$ 与 $cx+d$ 都在数轴上处处有定义，于是

$$(ax+b)\pm(cx+d) \quad 与 \quad (ax+b)(cx+d)$$

都在数轴上处处有定义. 但是 $c\neq 0$ 时，$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的定义域不能包括 $x=-d/c$ 这一点.

【例 2】 如果根据 $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$ 来看正切函数的定义域，就不能包括 $\cos x$ 的零点 $x=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，尽管 $\sin x$ 与 $\cos x$ 都在数轴上处处有定义.

有限个正整指数的幂函数和 1 各乘以常数之积的代数和

叫做*有理整函数*，也叫做*多项式*．常量函数属于这一类．两个有理整函数之商，当分母不是常数时，叫做*有理分函数*．有理整函数与有理分函数，合称为*有理函数*．有理函数仅用四则运算组成．如果组成的函数除去四则运算外，还有开方运算，而被开方式含有变数，则称*无理函数*，有理函数与无理函数合称为*代数函数*[*]．此外都是*超越函数*．以上都是就一个变数的情形说的．

【例 3】 $\sqrt{5-x}$ 的定义域是 $-\infty<x\leqslant 5$．$\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $1\leqslant x<+\infty$．而 $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$ 与 $\sqrt{(5-x)(x-1)}$ 的定义域是 $1\leqslant x\leqslant 5$．$\sqrt{5-x}/\sqrt{x-1}$ 的定义域是 $1<x\leqslant 5$．

【例 4】 两函数

$$y=\sin x \quad 与 \quad y=\frac{x\sin x}{x}$$

并不一样．前者的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$；后者的定义域为 $(-\infty,\ 0)$ 与 $(0,\ +\infty)$ 两区间．第二个函数在 $x=0$ 这一点无定义，此外与第一个函数一样．

## 3.8 双曲函数

工程技术里有一类常用的函数，叫做*双曲函数*．其中重要的两个是：

双曲正弦 $$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x});$$

双曲余弦 $$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}).$$

这两个函数的定义域都是 $(-\infty,\ +\infty)$．$\operatorname{sh}x$ 是奇函数；$\operatorname{ch}x$ 是偶函数．

---

[*] 代数函数的定义还不一致，一般认为按运算次数是有限还是无限来划分函数的界限比较合适，所以我们采用这个说法．

$x>0$ 时，$e^x$ 单调上升．如果 $0<x_1<x_2$，必然 $e^{x_1}-e^{x_2}<0$，
$e^{-x_1}-e^{-x_2}=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1}e^{x_2}}>0$，于是

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x_1-\operatorname{sh} x_2&=\frac{1}{2}\left[(e^{x_1}-e^{x_2})-(e^{-x_1}-e^{-x_2})\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{e^{x_1}e^{x_2}}\right]<0;\\\operatorname{ch} x_1-\operatorname{ch} x_2&=\frac{1}{2}\left[(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1}e^{x_2}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{(e^{x_1}e^{x_2}-1)(e^{x_1}-e^{x_2})}{e^{x_1}e^{x_2}}\right]<0.\end{aligned}$$

两曲线在 $x>0$ 时都单调上升．$y=\operatorname{sh} x$ 的曲线关于原点对称，所以 $x<0$ 时也单调上升；$y=\operatorname{ch} x$ 的曲线关于 $y$ 轴对称，所以 $x<0$ 时单调下降．

要画双曲正弦的图象，可以先画辅助曲线 $y=e^x$ 与 $y=-e^{-x}$（图 1–47 中的虚线），然后随便画 $y$ 轴的平行线与辅助曲线分别交于 $P_1$、$P_2$ 两点，线段 $P_1P_2$ 的中点便是 $y=\operatorname{sh} x$ 的曲线的点．这样描得足够的点以后，通过这些点画一条平滑的曲线，便是所求的曲线．这作图法的理论是显而易见的．

图 1–48 是 $\operatorname{ch} x$ 的图象，画法和 $\operatorname{sh} x$ 的情形相仿．这曲

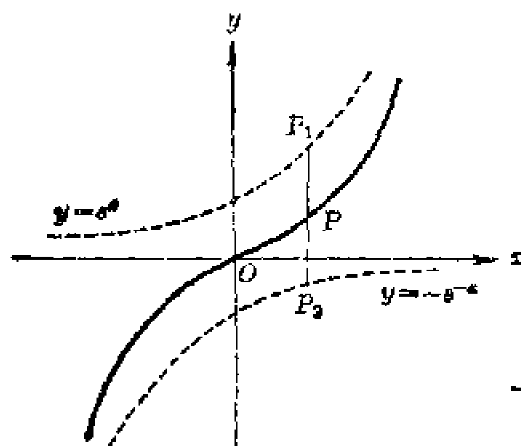


图 1–47

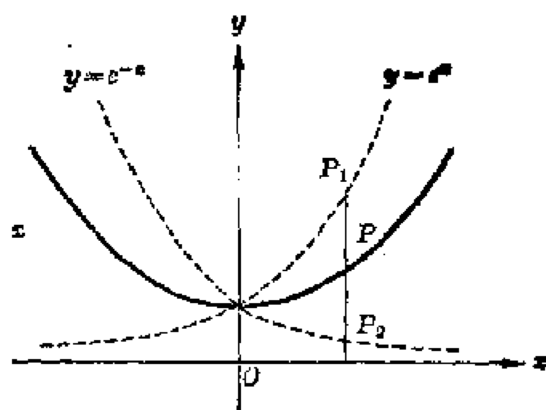


图 1–48

线叫做*悬链线*.

双曲函数是与三角函数对立的一套函数. 其中还有

双曲正切 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$,

双曲余切 $\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

等等. 这一套函数除去周期性而外, 几乎处处与三角函数有对等的性质. 例如

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

第一个公式的证明是

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2-\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2=\frac{1}{4}(2+2)=1.$$

其余两个的证明留给读者作练习.

§2.11 例 3 所求的实际是双曲正弦与双曲余弦的矫形反函数, 叫做*反双曲正弦*及*反双曲余弦*, 它们的记号是 $\arg\operatorname{sh} x$ 与 $\arg\operatorname{ch} x$, 即是

$$\arg\operatorname{sh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$
$$\arg\operatorname{ch} x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}).$$

这里画曲线 $y=\operatorname{sh} x$ 与 $y=\operatorname{ch} x$ 的方法也很有用. 凡当 $F(x)=f(x)+\varphi(x)$ 时, 先在同一个坐标平面上画出 $y=f(x)$ 及 $y=\varphi(x)$ 的曲线, 然后把对应于同一个 $x$ 值的两个纵坐标代数地加在一起, 就是曲线 $y=F(x)$ 上对应于同一横坐标的点. 这种作图法叫做*累标法*.

## 3.9 复合函数

如果 $y$ 是 $u$ 的函数, $u$ 又是 $x$ 的函数:

$$y=f(u),\quad u=g(x), \tag{3.16}$$

而且 $g(x)$ 的值域在 $f(u)$ 的定义域内，那么每当 $x$ 在 $g(x)$ 的定义域里取一个值时，便经过 $u$ 的传导而有 $y$ 的一个值和它对应，于是 $y$ 是 $x$ 的函数，即是

$$y=f(g(x)). \tag{3.17}$$

这样串连而成的函数，叫做两个函数的*复合函数*．$u$ 叫做*中间变量*，$f$ 叫做*外层函数*，$g$ 叫做*内层函数*．由 (3.16) 到 (3.17) 的过程叫做函数的*复合*．(3.17) 是由 $f(u)$ 与 $g(x)$ 复合成的．这是函数结构的另一种方式．

例如 $y=\sin u$, $u=x^2+1$ 时，$y=\sin(x^2+1)$ 便是复合函数．并且说 $y=\sin(x^2+1)$ 是 $y=\sin u$ 与 $u=x^2+1$ 的复合．

因为 $y$ 是 $u$ 的函数，$u$ 自己又是函数，所以复合函数又叫做*函数的函数*，即是说 $y$ 是函数 $u$ 的函数．

复合函数未必只复合一次，可能复合好几次．例如由 $y=\lg u$, $u=1+v$, $v=\sqrt{w}$, $w=1+x^2$ 经过三次复合便构成 $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$．

构造复合函数时，要注意中间变量的值域必须属于外层函数的定义域．如

$$y=\arcsin(1+\sqrt{1+x^2})$$

就没有意义，这是因为不论 $x$ 是什么实数，$1+\sqrt{1+x^2}$ 都不能在反正弦的定义域 $[-1,1]$ 之内．

复合函数的效用有两方面：一方面是上边说的，由几个简单函数串连成一个复杂的函数；另一方面是以后用得最多的，把一个复合函数拆成几个简单的函数，一般要拆到每个简单函数都是基本初等函数．

【例1】 问 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 是怎样由基本初等函数复合成的？

解：令 $u=\sin^2\frac{1}{x}$，则 $y=e^u$，令 $v=\sin\frac{1}{x}$，则 $u=v^2$，令 $w=\frac{1}{x}$，则 $v=\sin w$．所以 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 由

$$y=e^u,\ u=v^2,\ v=\sin w,\ w=\frac{1}{x}$$

复合而成．

【例 2】 将 $y=ae^{c^2+x^2}$ 按复合函数拆开．

解： 令 $u=e^{c^2+x^2}$，得 $y=au$，令 $v=c^2+x^2$，得 $u=e^v$，令 $t=x^2$，得 $v=c^2+t$，所以 $y=ae^{c^2+x^2}$ 是由下列函数复合成的：

$$y=au,\ u=e^v,\ v=c^2+t,\ t=x^2.$$

## 3.10 初等函数

§3.7 与 §3.9 说了两种由基本初等函数构成其他函数的方法，一种是四则运算；一种是函数的复合．虽然未曾明白说乘方与开方的运算，但是幂函数可以包括这两种运算，实际上，乘方与开方等于幂函数的一次复合．这样，就把一切代数运算都包括进去了．

**定义** 用常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合而构成的函数，称为*初等函数*．

初等函数的构成既有四则运算，又有函数的复合，我们又应该会把这种函数拆开．

【例 1】 曲柄连杆上滑块运动的规律（§2.8 例 2）

$$s=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$$

是两个复合函数 $u=r\cos\omega t$ 与 $v=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$ 之和．其中第一个函数是由

$$u=rx,\ x=\cos\theta,\ \theta=\omega t$$

复合成的；第二个函数是由

$$v=\sqrt{y},\ y=l^2-r^2z,\ z=\psi^2,\ \psi=\sin\varphi,\ \varphi=\omega t$$

复合成的.

【例 2】 将 $y=\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 按复合函数与函数运算拆开.

解：令 $u=x\sin\dfrac{1}{x}$，得 $y=u^{-1}$，

令 $v=x$，$w=\sin\dfrac{1}{x}$，得 $u=vw$，

令 $t=\dfrac{1}{x}$，得 $w=\sin t$，

所以 $y=\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 的构成有以下五步：

$$y=u^{-1},\ u=vw,\ v=x,\ w=\sin t,\ t=\frac{1}{x}.$$

这里第二个函数是乘法运算，其余都是函数的复合.

非初等的函数是什么样的函数呢？仔细回忆初等函数的定义就可以知道．不是由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和函数复合而构成的函数则不是初等函数．例如以等比级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

来说，它在区间 $(-1, 1)$ 内是 $x$ 的函数，也不难求它的值，然而按这个表示方法来说，它不是初等函数，这是因为它里边包函着无限次的加法和乘法运算.

从本节开始一直到现在是一个重要的段落．这里给初等函数作了一番系统的整理．§3.2 到 §3.4 是初等函数的根本，讲的是最简单的基本初等函数．§3.7 与 §3.9 讲的是初等函数的结构．从这里知道，虽然初等函数复杂，但是归根结蒂不外乎五种简单函数的两种结合．对于这五种函数了解到

什么程度，就能对其他初等函数了解到什么程度．数学重视整理工作，把研究对象整理得有头有绪，以后在研究讨论之中就可以化繁为简．

## 3.11 曲线的变位与变形

基本初等函数，经过简单的改造，形式上就会复杂一些．变换函数的同时，曲线也会有相应的改变．常见的改变有两种：一种是平移；一种是伸缩，这里伸缩包括着放大与缩小两方面．反过来说，形式上复杂的函数也可以改造成简单的函数，从而有助于我们认识复杂函数的曲线．

【例 1】 作下列函数的图象：

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3. \qquad (3.18)$$

解：令 $y=y'+3$，$x=x'-\frac{\pi}{6}$，平移坐标轴（参看数理化自学丛书《平面解析几何》第五章），(3.18) 就变为简单的正弦曲线

$$y'=\sin x'. \qquad (3.19)$$

取 $O'\left(-\frac{\pi}{6},\ 3\right)$ 为新原点，平移坐标轴，在新坐标系 $O'$-$x'y'$ 里画 (3.19) 的曲线．这曲线对于旧坐标系 $O$-$xy$ 来说即是

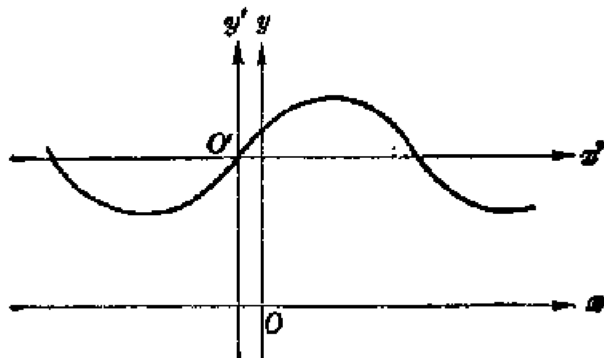



图 1-49

(3.18)的曲线.

以上讲的是曲线的变位，变位并不变形．有些曲线是从简单曲线变形来的．最常见的是放大或缩小．§3.4里 $y=\ln x$ 的曲线就是由曲线 $y=\lg x$ 的每点的纵坐标按固定比例 2.255:1 放大而成的.

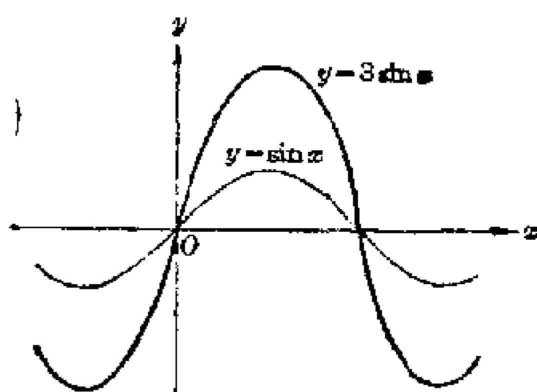


图 1-50

【例 2】 将曲线 $y=\sin x$ 的每点的纵坐标按 $A:1$ 之比放大，便是 $y=A\sin x$ 的曲线．$A>0$ 时，同号区间、单调区间、零点都不变．$A<0$ 时，正号区间与负号区间互换，上升区间与下降区间互换，其他不变．$|A|<1$ 时，曲线缩小．图 1-50 是按 $A=3$ 画的曲线.

关于一般情形下的 $y=kf(x)$ 如何作图，由读者补述.

【例 3】 $y=\sin ax$ 的曲线可以由 $y=\sin x$ 的曲线沿着 $x$ 轴的方向放大或缩小得来．$a>1$ 时，缩小；$0<a<1$ 时，放大.

每当 $ax$ 经过 $2\pi$ 时，$\sin ax$ 的值重复一遍．所以 $\sin ax$ 的周期是 $2\pi/a$．$a>1$ 时，$2\pi/a<2\pi$，周期比 $\sin x$ 的周期短，曲线振动快；$0<a<1$ 时，$2\pi/a>2\pi$，周期长，振动慢．$a<0$ 时，因为

$$\sin ax=-\sin(-ax),$$

曲线不但有伸缩而且上下颠倒.

图 1-51 中的虚线是 $y=\sin x$ 的图象，实线是 $y=\sin\frac{5}{2}x$ 的图象.

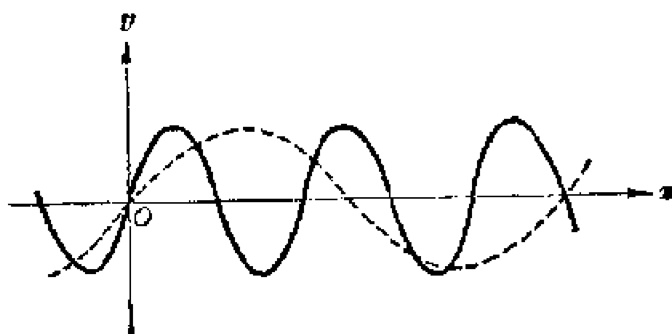


图 1-51

一般情形，当 $a>1$ 时，$f(ax)$ 的图象是沿着 $x$ 轴的方向由 $y=f(x)$ 的图象压缩而成；在 $0<a<1$ 时，是放大而成.

从 $y=\sin x$ 经过平移伸缩，变成

$$y=A\sin(ax+\varphi).$$

它的图象叫做正弦曲线. 这是反映简谐振动的函数. 一般认为 $A>0$，$A$ 叫做振幅，$\varphi$ 叫做初相，周期是 $T=\frac{2\pi}{a}$. 单位时间内振动的次数 $\frac{1}{T}=a/2\pi$，叫做振动的频率.

## 习 题 九

1. 验证下列关系式：

   (1) $\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x=\mathrm{ch}\,2x$; (2) $2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x=\mathrm{sh}\,2x$;

   (3) $\mathrm{sh}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta\pm\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$;

   (4) $\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta\pm\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$;

   (5) $1-\mathrm{th}^2 x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; (6) $1-\mathrm{cth}^2 x=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

   (7) $\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x=e^x$; (8) $\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=e^{-x}$.

2. 利用 $y=\sin x$ 的图象作

   (1) $y=\sin 2x$; (2) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

   (3) $y=\frac{1}{2}\sin x$; (4) $y=1-\sin x$

   的曲线.

3. 作下列函数的图象：

(1) $y=x+\sin x$;　　(2) $y=\sin x+\cos x$.

4. 指出下列函数是由什么样的基本初等函数经过怎样的运算组成的：

(1) $y=e^{\sin x}$;　　(2) $y=e^{x}\sin x$;

(3) $y=\ln\cos x$;　　(4) $y=e^{x^2}$;

(5) $y=10\sin\dfrac{\omega t}{2}$;　　(6) $y=\sqrt{2}\sin\left(314t+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(7) $y=5\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;　　(8) $y=\ln(1-x^2)$;

(9) $y=e^{-3t}\cos\omega t$;　　(10) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. 作下列函数的图象：

(1) $y=e^{-x}\sin x$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x\sin\dfrac{1}{x}}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

## 第一章小结

函数概念是本章的中心内容，初等函数的结构是基本知识，此外多数是本章与以后各章时常用到的概念和算法，其中绝对值不等式是必须要熟练掌握的技能.

第二节注意在函数的性质，怎样从函数的表示式去分析它的性质——上升、下降、奇偶等等. 这是认识具体函数的第一步，尽管看起来有些烦琐.

第三节专论初等函数. §3.10 最末一段话是这一大节主要内容的小结，概括了这一大节的内容和结构. 其中关于处理数学知识的关键——知识要系统化，尤其应该予以充分的注意.

只要懂得全章的内容，就会知道哪是重点．不必一一罗列．下边的几个问题可能对学习有一点帮助：

有人说函数的值与自变量的值是一一对应的．这说法对吗？用实例说明你的答案．——$A$、$B$两集的元素一一对应，即是说：$A$中每有一元素，$B$中必有唯一的元素和它对应，同时$B$中每有一元素，$A$中必有唯一的元素和它对应．

在函数的正式定义里，我们放弃了“因变量随自变量而变”的说法，采用了“因变量有确定的值对应于自变量”的说法，可是在微积分里还不能充分表现出它的优越性．这里“确定”两字应该注意：例如说“$F(n)$是自然数$n$的一个因数”，这“函数”的值就不是确定的．这样的问题不在我们的研究之列．这表明微积分虽说是研究变量的学科，但是变量的变化必须在我们的控制之中，否则不能取得确切的结果．

定义域与对应关系都是函数的组成部分．函数的复合与四则运算都是函数与函数的关系，是扩展函数的方法．我们在扩展函数时，特别说了新旧定义域间的关系．在四则运算之下，新函数的对应关系如何建立？问题十分容易，然而不应忽视．

画函数的图象是基本功，不要怕麻烦．§3.8对于$y=\varphi(x)+\psi(x)$的图象提出一种简便的作图法，这方法可以推而用于极坐标吗？$y=\varphi(x)\psi(x)$的图象能借$y=\varphi(x)$与$y=\psi(x)$的图象作图吗？可以深入地考虑一下。

# 第二章

# 数列的极限

«引言»里说过，微分法与积分法又叫做无穷小分析，它的每一步计算要经过无穷多次普通的运算．怎样会出现无穷多道手续，又怎样实现这样的运算呢？这问题都包括在极限理论之中．本章讲数列的极限，这种极限又和以后经常要用到的函数的极限紧密相关．

## 第一节 极限粗谈

### 1.1 早期的极限问题

为了知道极限是怎样的理论，又怎样从实践中发生的，先看几个具体问题．

【例 1】 公元前263年(魏景元四年)刘徽注«九章算术»，从单位圆内接正六边形开始，一次一次地将边数加倍作内接正多边形计算边长，来求圆周率 $\pi$．求到正 192 边形时，得到 $\pi$ 的近似值 3.14．到正 3072 边形，又得近似值 3.1416．因为他是为了论证前人的经验："半周半径相乘得积步(面积)"，所以他计算的都是多边形的面积，既然半径是 1，那么圆面积是 $\pi$，多边形面积的量数便是 $\pi$ 的近似值．求得多边形的每个边长，乘以边数便是圆周长的近似值．现在我们按这方法把刘徽的工作重写一下．

用勾股定理不难证明，从单位圆内接正 $n$ 边形边长 $s_n$(图 2-1 中的 $AB$)，求内接正 $2n$ 边形边长 $s_{2n}$(图 2-1 中的 $AO$)的

公式为

$$s_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}. \tag{1.1}$$

现在从 $s_6$ 开始，一个接一个地求 $s_{12}$, $s_{24}$, …，同时求多边形周界 $p_6$, $p_{12}$, $p_{24}$, … 得表 1.

表 1

| 正多边形的边长 | 正多边形的周长 | $\pi$ 的近似值 |
|---|---|---|
| $s_6=1=1.000000000$ | $p_6=6.000000000$ | 3.000000000 |
| $s_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$ $=0.517638090$ | $p_{12}=6.211657080$ | 3.105828540 |
| $s_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.517638090)^2}}$ $=0.261052385$ | $p_{24}=6.265257240$ | 3.132628620 |
| $s_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.261052385)^2}}$ $=0.130806261$ | $p_{48}=6.278700528$ | 3.139350264 |
| $s_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.130806261)^2}}$ $=0.065438169$ | $p_{96}=6.282064224$ | 3.141032112 |
| $s_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.065438169)^2}}$ $=0.032723462$ | $p_{192}=6.282904704$ | 3.141452352 |
| $s_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.032723462)^2}}$ $=0.016362273$ | $p_{384}=6.283112832$ | 3.141556416 |
| $s_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.016362273)^2}}$ $=0.008181198$ | $p_{768}=6.283160064$ | 3.141580032 |

这一套算法显然可以无休止地进行下去. 直观上看，内接正多边形的边数越多，周界越大，越接近圆周. 表1里第二栏的一串数就反映了这点事实. 古代人根据这种关系找出圆周率是3.1415与3.1416之间的某个数. 经过实践证明确实比以前的"周三径一"之说(认为$\pi=3$)好得多. 于是人们承认刘徽的结论是正确的.

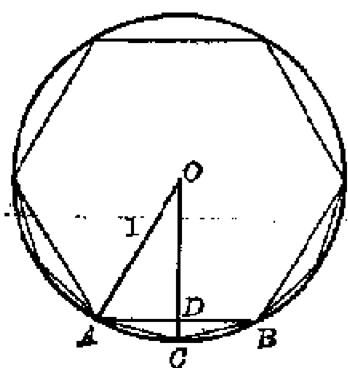


图 2-1

【例2】 《引言》里说过，从自由落体运动规律

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

求它在某个时刻上的瞬时速度. 现在具体求一下物体开始降落后第2秒之末的瞬时速度.

不知道瞬时速度，可以先求平均速度. 比如在第2秒以后一秒钟内的平均速度是

$$v_1=\frac{s(3)-s(2)}{3-2}=\frac{1}{2}g(3^2-2^2)$$
$$=\frac{5}{2}g=\left(2\frac{1}{2}\right)g.$$

这可能和我们所希望的结果差距很大. 但是可以把计算改进一下，求第2秒以后$\frac{1}{2}$秒内的平均速度:

$$v_2=\frac{s\left(\frac{5}{2}\right)-s(2)}{\frac{5}{2}-2}=g\left(\frac{25}{4}-4\right)=\frac{9}{4}g=\left(2\frac{1}{4}\right)g.$$

如果还不满意，可以求第2秒以后$\frac{1}{3}$秒内的平均速度:

$$v_3=\frac{s\left(\frac{7}{3}\right)-s\,(2)}{\frac{7}{3}-2}=\frac{3}{2}g\left(\frac{49}{9}-4\right)=\frac{39}{18}g=\left(2\frac{1}{6}\right)g.$$

如果仍然不满意，可以计算第 2 秒之后 $\frac{1}{n}$ 秒内的平均速度：

$$v_n=\frac{s\left(2+\frac{1}{n}\right)-s\,(2)}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{2}g\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{4n+1}{2n}g. \tag{1.2}$$

有了这个一劳永逸的公式，便可以随手写出第 2 秒之后任何几分之一秒内的平均速度，把前面求到的几个结果一并写出来，就是一串数：

$$\frac{5}{2}g,\ \frac{9}{4}g,\ \frac{13}{6}g,\ \frac{17}{8}g,\ \cdots,\ \frac{4n+1}{2n}g,\ \cdots, \tag{1.3}$$

去掉各数里的公因数 $g$，就是

$$\frac{5}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{13}{6},\ \frac{17}{8},\ \cdots,\ \frac{4n+1}{2n},\ \cdots, \tag{1.4}$$

这里每个数都比 2 大一点，比 2 多的部分是：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2n},\ \cdots, \tag{1.5}$$

$n$ 越大，所多的部分就越小．如果 $n$ 无止境地加大下去，$\frac{1}{2n}$ 就不停止地变小（单调下降），能小至不可名言．于是我们猜想说：极其势之所趋，$\frac{1}{2n}$ 将要变成 0，$2+\frac{1}{2n}$ 将要变成 2，$\left(2+\frac{1}{2n}\right)g$ 将要变成 $2g$．这可能就是我们期待的那个“瞬时速度”．

如果不是从第 2 秒之末以后求平均速度，而是在第 2 秒完了前 1 秒，$\frac{1}{2}$ 秒，$\frac{1}{3}$ 秒，…之内求平均速度(读者自己算一算)，这串不断变化的(单调上升)数也将要稳定在 $2g$ 附近．这更使我们相信第 2 秒之末的瞬时速度是 $2g$．

用物理实验可以证明(1.3)中的一串数是符合实际的．

【例 3】　求三棱锥 $V\text{-}ABC$(图 2-2)的体积，已知它的高 $VF=h$，底 $\triangle ABC$ 的面积是 $S$．

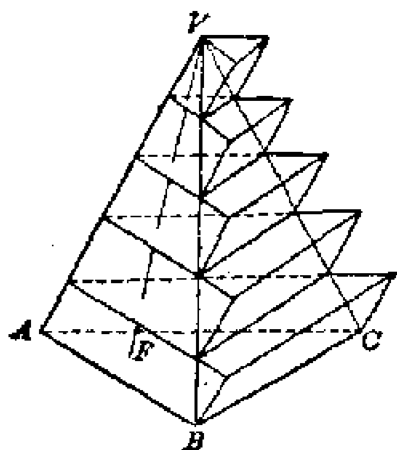



图　2-2

将 $VF$ 分成 $n$ 等分，通过每个分点作一个平面，平行于底面 $ABC$，这些平面把三棱锥截成 $n$ 段，断面是 $(n-1)$ 个与 $\triangle ABC$ 相似的三角形(读者自证)．用这些三角形和 $\triangle ABC$ 作下底，各作一个三棱柱，让它们的侧棱都平行于三棱锥的某一个棱，比如 $VA$，每个棱柱的高自然都等于 $\frac{h}{n}$．把这些棱柱的体积加在一起，便是三棱锥体积的近似值．

我们知道棱柱的体积等于底面积与高的乘积．现在这些棱柱的底面积(由上而下)是

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 S,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2 S,\ \left(\frac{3}{n}\right)^2 S,\ \cdots,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2 S,$$

所以这些棱柱体积之和是

$$V_n=\frac{Sh}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=Sh\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \tag{1.6}$$

现在令 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，就得到一串数：

$$Sh,\ \frac{5}{8}Sh,\ \frac{14}{27}Sh,\ \frac{15}{32}Sh,\ \cdots,$$

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)Sh,\ \cdots. \tag{1.7}$$

这里第一个数 $Sh$ 是与棱锥同底同高的棱柱的体积，当然比棱锥的体积大得多．第二项 $\frac{5}{8}Sh$ 是两个棱柱体积之和，两个的高都是 $\frac{h}{2}$，下边一个的底是 $\triangle ABC$，上边一个的底是棱锥正中间的横断面面积，如此等等．直观上看，(1.7)中的一串数都比我们期待的数大．可是 $n$ 越大时(即分的段数越多时)，误差越小．(1.6)式末端两个括号里的 $\frac{1}{n}$ 随着 $n$ 的增大而变小，$1+\frac{1}{n}$ 和 $2+\frac{1}{n}$ 越来越靠近 1 和 2，从而 $V_n$ 越来越靠近 $\frac{1}{3}Sh$.

如果用 $n-1$ 个横断面作棱柱的上底，共有 $n-1$ 个小棱柱，它们的体积之和是：

$$V_n'=Sh\cdot\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

构成与(1.7)类似的一串数，这串数仍然逼近于 $\frac{1}{3}Sh$.从而我们有理由猜想：三棱锥的体积等于底面积与高乘积的三分之一．

经过考验(比如用重量或容水量与同底等高的棱柱比较)，这结论确与事实相符．

## 1.2 初步认识

上面三个例题所用的方法，可以用“逼近法”三个字描述．由于不能一下子求得所期望的数，便一步步地来，让它一步一

步地逼近目标．这种方法能解决很多问题．

逼近法的共同点是，必须一个接一个地作一串计算，求一串近似于答案的数，而且这一串数能够一个比一个地逼近答案．例 2 中的(1.3)是主要的一串数，(1.4)，(1.5)是辅助的两串数．例 3 中起决定作用的是(1.7)．例 1 有三串数，一串是正多边形的边长，一串是正多边形的周长，另一串是 $\pi$ 的近似值．虽然这里不象例 2 和例 3 有(1.2)和(1.6)那样的统一公式来概括(1.3)与(1.7)中的一切数，但是公式(1.1)能保证一步步地算下去．所以实质上能求任何正 $6\times 2^n$ 边形的边长，从而能求周长和相应的 $\pi$ 的近似值．

逼近法固然能解决不少问题，然而还有一些不定的因素或不能使人满意之处．第一是一题一法，不同的问题要用不同的办法．那么能不能找一个共同的原则来处理这类问题呢？第二，逼近法应该计算无穷多次(引言里说"微积分的计算从理论上说，都是无穷多道手续合成的，"这话指的就是现在这种逼近法)，但无穷多道手续是人事上做不到的．所以只能从有限的若干步计算去推测它的最后结果．在一般情形下，又怎么保证那一串数的变化趋势不会中途改变呢？

随便给无穷多的一串数，要判断它是否能趋于稳定，若能趋于稳定，又稳定在什么数上？这是逼近法的根本问题．这问题解决以后，再进而讨论连续变量的同样问题．这就是微积分算法的核心，叫做"极限理论"．

## 1.3 数列

前面三个例题里所写的(1.3)，(1.4)，(1.5)，(1.7)都是按照一定次序排列起来的一串数，都是数列．其中每个数称为数列的一项．各项中可以有相同的．项数无穷多的数列，

称为无穷数列. 否则,称为有穷数列. (1.3), (1.4), (1.5), (1.7)都是无穷数列. 以后讨论的数列,都是无穷数列. 无穷数列的一般形式是:

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots,$$

记作 $\{s_n\}$, 简写为数列 $\{s_n\}$. $s_n$ 叫做它的通项. 例如(1.2)是(1.3)的通项, $\frac{1}{2n}$ 是(1.5)的通项, (1.6)是(1.7)的通项.

第一章§2.7中曾经说过,数列是自然数集上的函数. 因此所谓给定一个数列, 就是给定一个函数 $s=f(n)$, 或 $s=s_n$. 例如 $f(n)$ 代表自然数 $n$ 所含的最大质因数时, 数列为

$$1, 2, 3, 2, 5, 3, 7, 2, 3, 5, 11, \cdots.$$

作为一切数列的定义域的一切自然数

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \tag{1.8}$$

也是数列,它的通项是 $n$. 因为它在理论上所处的地位特殊,所以这里把它的性质研究一下. 我们知道:

(1) 1是自然数;

(2) 每个自然数有一个比它大1的后继数. 而且不同的数有不同的后继数.

这就确定了自然数有以下的性质:

(1) 有次序(一个接着一个地添下去);

(2) 无穷多(没有最后的一个).

因为自然数是无穷数列的定义域, 所以自然数又把它的这种性质传给了数列. 那么数列一定:

(1) 有首项;

(2) 每项必有其后继项(有次序、无穷多项).

以后凡说"$n$ 沿着自然数变化时", 就是说 $n$ 按照数列(1.8)一个一个地、永远不停止地变大. 这种变化过程用记号

$n\to\infty$ 表示．"$\infty$"读作无穷大．"$n\to\infty$"通常读作"$n$ 趋于无穷大"．其实这读法不够恰当，因为 $\infty$ 不是一个确定的数，所以不该说 $n$ 趋于一个不确定的东西． $n\to\infty$ 的意义应该是"$n$ 无穷增大"或"$n$ 无穷变大"．

如果 $n$ 沿着负整数列 $-1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ -n,\ \cdots$
变下去，便时常说"$n$ 趋于 $-\infty$"．记作 $n\to-\infty$．相对地说，前边说的 $n\to\infty$ 应该写作 $n\to+\infty$．一般没有区分两种情形的必要时，或从上下文能知道是趋于 $+\infty$ 时，只写 $n\to\infty$ 就够了．

## 习 题 一

1．照 §1.1 例 2 那样，求自由落体在降落后第 3 秒之末的瞬时速度．

2．求证曲线 $y=x^2$（图 2-3）及直线 $y=0,\ x=a(a>0)$ 所围的面积等于 $\frac{1}{3}a^3$．

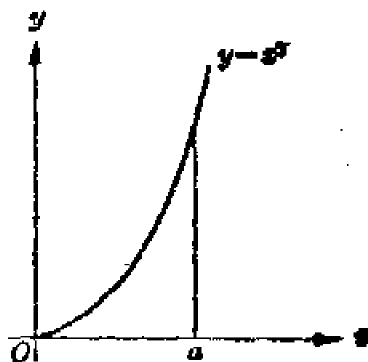



图 2-3

3．圆锥的底面是半径为 $r$ 的圆（图 2-4），高是 $h$．仿照 §1.1 例 3，证明它的体积等于 $\frac{1}{3}\pi r^2h$．

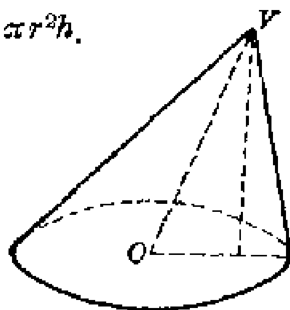



图 2-4

## 第二节　数列的极限

### 2.1　数列的极限

第一节看到的数列都是渐趋稳定的．一般地说，数列中数的变化情形并不都这样．为此再举几个数列看看：

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}:\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots;$$

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}:\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots;$$

$$\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{17}{16},\ \cdots,\ 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots.$$

$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的各项都大于1，单调下降，越来越近于1；$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$的各项都小于1，单调上升，越来越近于1．$\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$的单数项都小于1，双数项都大于1，但是各项与1之差的绝对值越来越小．这三个数列都渐趋稳定，稳定在1的近旁．再看：

$$\{\sqrt{n}\}:\quad 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \cdots,\ \sqrt{n},\ \cdots;$$
$$\{(-2)^n\}:\quad -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots;$$
$$\{(-1)^n\}:\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots.$$

$\{\sqrt{n}\}$的一切项都是正数，越来越大，只要把$n$取得充分大，要$\sqrt{n}$多大就能多大；$\{(-2)^n\}$的各项正负相间，绝对值越来越大；$\{(-1)^n\}$的各项永远在$-1$与1两数上来回跳跃．这都是变化不趋于稳定的数列．

数列的变化，大体分为两类：一类变化渐趋稳定，越来越与某个常数接近；另一类则不能保持与某个唯一的常数接近．

§1.1三个例题里的数列都属于第一类. 显然能解决问题的数列是这一类,所以应该特别注意它们.

对于第一类数列的变化情形, 已经用过许多状语:"越来越近于某个常数","趋于某个常数","逼近某个常数","与某常数之差越来越小",……. 然而这都不是严格的说法. 为了给出严格的科学解释, 再把§1.1例2里通项为

$$v_n=\frac{4n+1}{2n}g$$

的平均速度列

$$\{v_n\}: \frac{5}{2}g, \frac{9}{4}g, \frac{13}{6}g, \frac{17}{8}g, \cdots, \frac{4n+1}{2n}g, \cdots$$

的变化分析一下,看看怎样说才严格正确.

$v_n$与瞬时速度$v=2g$之差是

$$E=g/2n=\frac{490}{n}\text{ 公分/秒},$$

$n$增大时, $E$变小. 如果只说:

"$n$充分大时, $E$便充分小."

这话只表示, 比如: $n$大到980时, $E$就小到$\frac{1}{2}$; $n$大到1960时, $E$就小到$\frac{1}{4}$, …. 其中没有说$n$等于980以后$v_n-v$不会又大于$\frac{1}{2}$, $n$等于1960以后, $v_n-v$不会又大于$\frac{1}{4}$. 为了防止这种漏洞,不得不说:

"$n$充分大时, $v_n-v$便充分小, 而且$n$继续加大时, $v_n-v$能保持这样小(不再变大)."

或者说:

"$n$增大到某个限度$N$以后, $v_{N+1}$, $v_{N+2}$, …,与$v$之差都小于某个很小的数$\varepsilon$."

或者说：

“有某个号码 $N$，凡当 $n>N$ 时，$v_n-v<\varepsilon$.”

话说到这种程度，还不足以保证 $v_n$ 能和 $v$ 任意地接近. 比如说，$n>1960$ 时，诚然能保证 $v_n-v$ 都小于 $\frac{1}{4}$，但是不能排除一切 $v_n-v$ 大于 $\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{16}$，…. 倘若有这种现象，就又不是 $v_n$ 逐渐稳定在 $v=2g$ 的近旁了. 所以这里还必须要 $\varepsilon$ 是任意小的正数才行. 把这话说完整就是：

“任意指定一个($v_n-v$ 将要小到的)限度 $\varepsilon(>0)$，一定能够找到一个号码 $N$，保证$\{v_n\}$中号码 $n$ 大于 $N$ 的一切 $v_n$ 都满足不等式 $v_n-v<\varepsilon$.”

把这话再说得形式化一点，便是

“对于任意给定的小正数 $\varepsilon$，总有自然数 $N$，保证 $v_{N+k}-v<\varepsilon\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.”

这才是“$v_n$ 逼近 $v$”的严格的数学语言.

$\{v_n\}$ 里的 $v_n$ 都大于 $v$，所以只用 $v_n-v$ 就可以表示 $v_n$ 对于 $v$ 的误差. 一般数列 $\{s_n\}$ 的各项可以时而大于它所逼近的数 $a$，时而又小于 $a$，那么 $s_n$ 对于 $a$ 的误差就必须用 $|s_n-a|$ 表示.

**定义 1** $\{s_n\}$ 是数列，$a$ 是常数. 如果给定了不论怎样小的正数 $\varepsilon$，总有自然数 $N$，保证 $\{s_n\}$ 里号码 $n$ 大于 $N$ 的一切项 $s_n$ 都满足不等式

$$|s_n-a|<\varepsilon \tag{2.1}$$

(或写作 $|s_{N+k}-a|<\varepsilon\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$)，便说 $a$ 是 $\{s_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} s_n=a \quad 或 \quad s_n\to a \quad (n\to\infty).$$

这记号读作：“$n$ 无穷增大时，$s_n$ 的极限等于 $a$”；或“$n$ 无穷增

大时，$s_n$ 逼近于 $a$". 有些书也陈述为"$n$ 趋于无穷时，$s_n$ 以 $a$ 为极限". 这定义通常简称为 $\varepsilon$-$N$ 定义.

极限的记号"lim"是拉丁文"极限"一词 limes 的前三个字母.

有极限的数列称为*收敛数列*；没有极限的数列称为*发散数列*. 前面列举的 $\{\sqrt{n}\}$, $\{(-2)^n\}$, $\{(-1)^n\}$ 都是发散数列；$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 都是收敛数列，这因为它们都以 1 为极限. 即是按定义 1 来说，对于这三个数列，当给定了任意小的正数 $\varepsilon$ 之后，各能找到一个自然数 $N$，使得不等式(2.1)成立. 怎见得呢？这三个数列的 $s_n$ 分别是 $\frac{n+1}{n}$, $\frac{n-1}{n}$, $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 那么 $|s_n-a|=|s_n-1|$ 分别是

$$\left|\frac{1}{n}\right|,\ \left|-\frac{1}{n}\right|,\ \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|.$$

希望前两个小于 $\varepsilon$，只需 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即可，或者只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 就够了. 不管 $\varepsilon$ 多么小，$\frac{1}{\varepsilon}$ 总是一个有限数，取 $N$ 为大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的一个正整数，就能满足定义 1 的要求. 至于第三个，只要 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ 或 $n>\frac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}$ 就成了(可以认为 $\varepsilon<1$). 随便给了 $\varepsilon$，任何一个大于 $\frac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}$ 的正整数都可以作为定义 1 里的 $N$. 比如指定了 $\varepsilon=\frac{1}{10}$，那么 $\frac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}=3.32193$，取 $N=4$ 就够了. 从而 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 里第四项以后的一切项与 1 之差的绝对值都小于 $\frac{1}{10}$. 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{500}$，那么

$$\frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}=\frac{\lg 500}{\lg 2}=\frac{2.69897}{0.30103}=8.97.$$

于是取 $N=9$ 就够了．从而 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 里第九项以后的一切项与 1 之差的绝对值都小于 $\frac{1}{500}$.

## 2.2 几何解释(点列的极限)

第一章里说过，为了方便，可以把数和以它为坐标的点混为一谈．数列的极限是较为复杂的概念．现在再用几何的说法把定义 1 说一遍．几何的直观性有助于我们对极限概念的理解．

数列自然要翻译作*点列*．点列是按照发生的顺序一个接一个地排列起来的无穷多点

$$\{P_n\}:\quad P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots,$$

其中可以有些点相同，设想把这些点按照它们的坐标都排列在数轴上．所谓 $\{P_n\}$ 稳定在一点 $A$ 的近旁，就是说在 $A$ 点的近旁有 $\{P_n\}$ 的无穷多点，在 $A$ 点的任何小邻域里，总有 $\{P_n\}$ 的点．这是粗略的说法．借点列来叙述定义 1，就是：

> $\{P_n\}$ 是点列，$A$ 是定点．如果任意指定一个不论怎样小的正数 $\varepsilon$，总有自然数 $N$，保证 $\{P_n\}$ 里第 $N$ 点以后的一切点 $(P_{N+1},\ P_{N+2},\ \cdots)$ 都落在邻域 $N(A,\ \varepsilon)$ 里(图 2-5)．便说 $A$ 是 $\{P_n\}$ 的极限．

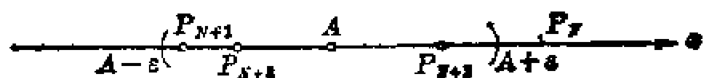



图 2-5

对于点列的极限也用记号

$$\lim_{n\to\infty} P_n=A \quad 或 \quad P_n\to A \quad (n\to\infty).$$

这时照样地说点列 $\{P_n\}$ 收敛，而且收敛于 $A$. $\{P_n\}$ 没有极限时，便说它发散.

$\{P_n\}$ 在邻域 $N(A, \varepsilon)$ 以外的点永远只有有限个，在 $N(A, \varepsilon)$ 以内的点，永远有无穷多. 假设 $\{\varepsilon_k\}$ 是收敛于 0 的正数列，令定义 1 里的 $\varepsilon$ 按这数列变下去，便得到 $A$ 点的邻域列

$$N(A, \varepsilon_1), N(A, \varepsilon_2), N(A, \varepsilon_3), \cdots, N(A, \varepsilon_k), \cdots,$$

邻域的长度 $2\varepsilon_k$ 趋于零. 不管在哪个邻域之外，$\{P_n\}$ 的点都只有有限个，而每个邻域里有 $\{P_n\}$ 的无穷多点. 这就是我们当初想象的情况：在 $A$ 点的任何近旁总有 $\{P_n\}$ 的点.

## 2.3 例题

为了熟习 $\varepsilon$-$N$ 定义，现在举几个证明数列极限的例题. 求证数列 $\{s_n\}$ 的极限等于 $a$，就是要证明 $|s_n - a|$ 可以任意小，而且小到某个程度之后不能再变大. 这项工作就是对于任意小的正数 $\varepsilon$，看看能否找到一个足够大的自然数 $N$，保证

$$|s_{N+1}-a|, |s_{N+2}-a|, \cdots, |s_{N+k}-a|, \cdots$$

都小于 $\varepsilon$. 能够找到这样的 $N$，就是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$，没有这样的 $N$，$\{s_n\}$ 就不以 $a$ 为极限.

定义说"对于任意小的正数 $\varepsilon$，总有自然数 $N$"，就是说对于每个可能的 $\varepsilon$，有一个 $N$. $\varepsilon$ 既然不定，$N$ 就要跟着 $\varepsilon$ 变. 所以必须用一个包含着 $\varepsilon$ 的公式[*]来表示 $N$，才能够适应 $\varepsilon$ 的任意性. 从哪里找这个公式呢？从定义里的不等式

$$|s_n - a| < \varepsilon$$

来估计. 这一步工作与解不等式相仿，是试探性的工作.

【例 1】 证明数列

[*] 一般地说，未必能用公式写出来，但初学时总是用公式来表示的.

$$1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \cdots \qquad (2.2)$$

的极限是 0.

【证】 这数列的通项有两个形式:

当 $n$ 是偶数时，$s_n=0$;

当 $n$ 是奇数时，$s_n=\dfrac{2}{n+1}$.

求证数列的极限是 0，就是要证明 $|s_n-0|=|s_n|=s_n$(因为 $s_n\geqslant 0$) 可以任意小. 具体的做法是对于任意小的正数 $\varepsilon$，找一个合于定义 1 要求的自然数 $N$. 按问题的提法来看，这样的 $N$ 一定存在.

从 $s_n$ 的第一个形式来说，任何自然数都可以作为 $N$. 所以证明工作的重要部分在 $s_n$ 的第二个形式 $\dfrac{2}{n+1}$. 下边用试探的方法找 $N$:

希望 $\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$ 成立，只要 $\dfrac{2}{\varepsilon}<n+1(\varepsilon>0)$成立. 而希望 $\dfrac{2}{\varepsilon}<n+1$ 成立，只要 $\dfrac{2}{\varepsilon}-1<n$ 就成了. 随便指定了 $\varepsilon$，也就指定了 $\dfrac{2}{\varepsilon}$. 假设

$$N_1\leqslant\frac{2}{\varepsilon}<N_1+1, \qquad (2.3)$$

这里 $N_1$ 是一个正整数，由此

$$N_1-1\leqslant\frac{2}{\varepsilon}-1<N_1.$$

可见 $n=N_1$ 时，$\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$. $n$ 若大于 $N_1$，显然也有

$$\frac{2}{n+1}<\frac{2}{N_1+1}<\varepsilon.$$

这说明 $N_1-1=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]-1$ 合于定义 1 的要求. 因此可以取

$$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]-1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]-2.$$

既然对于任意指定的正数 $\varepsilon$，能找到一个自然数 $N$，它和 $\varepsilon$ 共同满足定义 1 的要求. 这就表明数列(2.2)收敛于 0.

【例 2】 假设 $|r|<1$，试证数列 $\{r^n\}$ 以 0 为极限.

【证】 要证明的是：每当指定了一个 $\varepsilon>0$，一定能找到一个自然数 $N$，保证 $n>N$ 时，

$$|r^n-0|=|r^n|=|r|^n<\varepsilon \tag{2.4}$$

(显然 $\varepsilon\geqslant1$ 没有约束力). 为了求得这样的 $N$，从不等式(2.4)两端取对数，得

$$n\lg|r|<\lg\varepsilon. \tag{2.5}$$

用负数 $\lg|r|$(因为 $|r|<1$)除不等式(2.5)的两端，得

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|r|}. \tag{2.6}$$

$\lg\varepsilon/\lg|r|$ 是正数. 取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|r|}\right]$，则当 $n>N$ 时，(2.6)式成立，从而(2.5)式成立，最后(2.4)式成立.

所以对于任意小于 1 的正数 $\varepsilon$，总有一个自然数

$$N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|r|}\right],$$

只要 $n>N$，便一定 $|r^n-0|<\varepsilon$. 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$.

这例题虽然简单，却很重要. 大家回忆一下，证明等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$ 时，就用到了最后这个结果.

如果数列收敛，每当 $\varepsilon$ 指定之后，总有合乎要求的 $N$. 一般地说，$N$ 有最小限度. 如果一定要这个最小限度的 $N$(例 1，例 2 就这样)，$N$ 就是 $\varepsilon$ 的函数，所以有时把 $N$ 写作 $N(\varepsilon)$，但是定义 1 并没有这样要求，它只说有一个 $N$ 就成了. 所以

把 $N$ 取大一点也无妨. §2.1末尾讨论数列 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 时，就没有取最小的 $N$.

以上两个例题的证法，都是根据极限定义，从不等式 $|s_n-a|<\varepsilon$，设法变成形状为：

$$n>\psi(\varepsilon)$$

的不等式，然后从 $\psi(\varepsilon)$ 估计一个合适的 $N$. 这是最简单的试探方法. 这方法有时不容易实行.

【例3】 设 $s_n=\dfrac{n^2-n+5}{5n^2+2n-3}$. 试证数列 $\{s_n\}$ 的极限是 $\dfrac{1}{5}$.

【证】 $$\left|s_n-\frac{1}{5}\right|=\left|\frac{n^2-n+5}{5n^2+2n-3}-\frac{1}{5}\right|$$
$$=\left|\frac{-7n+28}{5(5n^2+2n-3)}\right|.$$

右端分母中的 $5n^2+2n-3$ 永远是正数 $(n\geqslant1)$. $n>4$ 时，分子 $|-7n+28|=7n-28$ 也是正数. 为了避开绝对值的麻烦，姑且认为 $n>4$. 于是期待知道的是，对于指定的正数 $\varepsilon$，$n$ 大于什么数时，

$$\frac{7n-28}{5n^2+2n-3}<\varepsilon. \tag{2.7}$$

从这不等式解 $n$ 还是较为麻烦. 因为"$N$ 不妨大一些"，可以把左端的分式适当地放大，尽量使计算化简. 记住 $n>4$，

$$\frac{7n-28}{5n^2+2n-3}<\frac{7n}{5n^2}=\frac{7}{5n}<\frac{2}{n}.$$

这时可以看出来，只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，便能使(2.7)成立. 就不等式

(2.7)来说，$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$就够了．再考虑到$n>4$，为了保证$\left|s_n-\frac{1}{5}\right|<\varepsilon$，$N$只须取4与$\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$两数中之大者．这关系记作

$$N=\max\left\{4,\ \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\}. \tag{2.8}$$

总结起来说：随便指定一个正数$\varepsilon$，总有(2.8)中那样一个自然数$N$，保证号码$n$大于$N$的一切$s_n$满足不等式

$$\left|s_n-\frac{1}{5}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n+5}{5n^3+2n-3}=\frac{1}{5}.$$

【例4】 假设$a>1$，试证数列$\{\sqrt[n]{a}\}$的极限是1.

【证】 要证明的是：能找到一个自然数$N$，保证$\sqrt[N+1]{a}$，$\sqrt[N+2]{a}$，$\sqrt[N+3]{a}$，…与1之差都小于预先指定的小正数$\varepsilon$.

因为$a>1$，所以$\sqrt[n]{a}>1$，于是$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1>0$．令$\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$，$\alpha_n>0$，那么根据二项式定理，知道

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n>1+n\alpha_n.$$

所以

$$\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n<\frac{a-1}{n}.$$

希望$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，只要$\frac{a-1}{n}<\varepsilon$就行了．可见在

$$n>N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$$

时，$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$．这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

这例题本来可以照例1或例2那样证明．现在为了容易估计$N$，而把$\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$换成较大的$\frac{a-1}{n}$，然后由不等式

$$\frac{a-1}{n}<\varepsilon$$

来决定 $N$. 这和例 3 证法的原则一样.

## 2.4 关于收敛数列的几点注解

(1) 收敛数列可以单调下降地逼近极限，这时各项都比极限大，如数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$. 也可以单调上升地逼近极限，如数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$. 还可以上下摆动地逼近极限，如数列 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$.

(2) 数列里可以有些项等于它的极限. §2.3 例 1 里的数列有无穷多项等于 0, 而 0 是这数列的极限.

(3) 数列的一切项也可以都等于一个固定的数 $c$:

$$c,\ c,\ c,\ c,\ \cdots,\ c,\ \cdots$$

这数列显然满足收敛的定义，极限是 $c$. 这和我们接纳常数为函数是一样的.

(4) 数列有无极限，以及极限是什么数值，不在于它开头的任何有限几项，而在于它后部的无穷多项. 因此讨论数列是否收敛，或进行证明时，可以略去任何有限几项，也可以添上或更改有限几项. 例如

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$$

的极限是 3.

$$8,\ -10,\ -4,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$$

(第四项以后都是 3) 的极限仍然是 3.

(5) 定义 1 不能判断数列是否收敛，只能在观察到某个数可能是极限时，用它正式检验一下，把结论肯定下来.

### 习 题 二

1. 在数轴上画出以下点列:

(1) $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{8}$, …, $\frac{4n+1}{2n}$, …;

(2) $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, …, $\frac{n+1}{n}$, …;

(3) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{n-1}{n}$, …;

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{17}{16}$, …, $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ….

2. 按照下边的要求各作一个数列:

(1) 上升并收敛于零; (2) 下降并收敛于 2;

(3) 摆动并收敛于 1; (4) 摆动无极限;

(5) 下降无极限.

3. 设 $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$, 问数列$\{a_n\}$有多少项在$(-0.0001, 0.0001)$之内? 有多少项在它外面?

4. 用数列极限的定义证明:

(1) 数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

收敛于 1 (其中自第 5 项起各项都等于 1);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+1}=\frac{3}{5}$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^3+1}=0$; (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2+1}=\frac{2}{3}$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=1$; (9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\frac{1}{2}$; (11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}=1$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$; (13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=0$;

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0$; (15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$;

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$.

5. 设 $P_3$ 是 $P_1P_2$ 的中点, $P_4$ 是 $P_2P_3$ 的中点, …, $P_n$ 是 $P_{n-2}P_{n-1}$ 的中点. 问点列 $\{P_n\}$ 有无极限?

## 2.5 无穷小

**定义 2** 以 0 为极限的数列,叫做无穷小。

假若用 $\varepsilon$-$N$ 的说法,就是:

$\{s_n\}$ 是数列, 如果对于任意小的正数 $\varepsilon$, 总有自然数 $N$, 保证 $\{s_n\}$ 里第 $N$ 项以后的一切项都满足不等式

$$|s_n|<\varepsilon$$

(或写作 $|s_{N+k}|<\varepsilon$, $k=1, 2, 3, \cdots$). 便说数列 $\{s_n\}$ 是无穷小.

注意: 这里说无穷小是数列,即是说它是变量."无穷小"三个字应该理解作"无穷变小". 因此它不是一个固定的很小的数. 十万分之一很小,然而它不变,所以不是无穷小.

以前遇到的数列如

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots;$$

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \cdots;$$

$|r|<1$ 时的 $\{r^n\}$,

都是无穷小. 从第二个数列来看,表示无穷小的数列里,允许有些项,甚至无穷多项是 0.

**定理 1** 如果 $\{s_n\}$ 是无穷小, $a$ 是常数, 那么 $\{as_n\}$ 是无穷小.

【证】 若 $a=0$, 定理显然成立. 若 $a\neq0$, 那么由于 $\{s_n\}$ 是无穷小,对于任意的 $\varepsilon>0$, 一定有自然数 $N$, 保证

$$|s_{N+k}|<\frac{\varepsilon}{|a|}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

从而推出 $|as_{N+k}|<\varepsilon$，所以 $\{as_n\}$ 是无穷小. ▌

**定理 2** 数列 $\{s_n\}$ 的极限等于 $a$，必然且只需 $\{s_n-a\}$ 是无穷小.

【证】 因为 $s_n\to a$ 与 $s_n-a\to 0$ 都是说：对于任意的 $\varepsilon>0$，总有一个自然数 $N$，保证

$$|s_{N+k}-a|<\varepsilon,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$ ▌

根据这条定理，在证明 $s_n\to a$ 时，可以改为证明 $s_n-a$ 是无穷小. 如果 $s_n-a$ 是熟知的无穷小，就不必再按 $\varepsilon$-$N$ 定义证明. 所以应该多记住一些无穷小，以备在证明极限问题时使用. 最简单的无穷小有：$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$k>1$ 时的 $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$a>1$ 时的 $\left\{\frac{1}{a^n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ 等.

【例】 假设 $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$. 求证 $\{x_n\}$ 的极限是 1.

【证】

$$x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

所以

$$|x_n-1|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}.$$

然而 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无穷小，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

## 2.6 极限定义的否定式

根据 $\varepsilon$-$N$ 定义证明 $\{s_n\}$ 以 $a$ 为极限，是从正面使用这定义. 如果

证明 $a$ 不是 $\{s_n\}$ 的极限，自然还应该从这定义着想，这是从反面使用 $\varepsilon-N$ 定义．认识事物要全面，所以我们也应该知道 $\varepsilon-N$ 定义的反面．这样的思考能加深我们对于正面的认识．现在把 $\varepsilon-N$ 定义的否定式分析一下．

为了把问题讲得清楚些，先说逻辑上的两条关系．一条是全称肯定命题与特称否定命题互相排斥．即是说这两种命题是正相反的，绝不能两者并存．例如：

$$\text{这筐苹果都是黄香蕉}^{*)}, \tag{2.9}$$

是全称肯定命题．所谓"全称"指的是主语(集体的)的全体，所谓"肯定"表现在谓语里的"是"字．这"是"字肯定了主语的某种属性．要驳倒这句话只须说

$$\text{这筐苹果有一个不是黄香蕉}. \tag{2.10}$$

这是特称否定命题．所谓"特称"就是说主语(集体的)的个别成员，所谓"否定"表现在谓语"不是"．这"不是"两字否定了那个特别成员的某种属性．这两个命题势不两立．可以用(2.10)反驳(2.9)，也可以用(2.9)反驳(2.10)．

另一条逻辑关系是：特称肯定命题与全称否定命题互相排斥．例如：

这筐苹果有一个是黄香蕉，

是特称肯定命题．"特称肯定"的意义仿照前面的说明去理解．这命题与全称否定命题：

这筐苹果都不是黄香蕉，

是互相排斥的，它们互相反驳．

这里应该记住一条规律：全称主语的一种属性用特称主语的反面属性去反驳；特称主语的一种属性，用全称主语的反面属性去反驳．

现在来分析 $\varepsilon-N$ 定义，看看应怎样否定它．这定义的条件可以分作三段：

① 对于任意的 $\varepsilon>0$，

② 总有一个自然数 $N$，

③ 保证 $|s_{N+k}-a|<\varepsilon\ (k=1, 2, 3, \cdots)$．

---

*) 黄香蕉是一种苹果名称．

① 中"任意的 $\varepsilon>0$"表示一切可能的 $\varepsilon$(正数),这是全称命题,应该用特称命题反驳. $\varepsilon$-$N$ 定义的反面应该是:

有某个 $\varepsilon_1>0$, 不能"有一个自然数 $N$, 保证

$$|s_{N+k}-a|<\varepsilon_1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)".$$

② 里的"有一个自然数 $N$"表示一切自然数中的一个,是特称命题,应该用全称命题反驳,即:

一切自然数 $N$, 不能"保证 $|s_{N+k}-a|<\varepsilon_1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$".

③ 里的"$|s_{N+k}-a|<\varepsilon_1 (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$". 是对一切自然数 $k$ 说的,是全称命题,应该用特称命题反驳. 所以 ③ 的反面应该是:

$$\text{有一个 } k=K,\ \text{使得 } |s_{N+K}-a|\geqslant\varepsilon_1.$$

把以上三段反驳连贯起来,便是:

有某个 $\varepsilon_1>0$, 对于一切自然数 $N$, 各有一个 $K$, 使得

$$|s_{N+K}-a|\geqslant\varepsilon_1. \tag{2.11}$$

然后把这话修改一下:由于这里的 $N$ 已经没有什么特性, 可以改作普通的号码 $n$, 即 $N+K$ 改作 $n+K$, 实际上 $n+K$ 只表示是 $n$ 后边的一个自然数. 从而(2.11)可以改作:

对于某个 $\varepsilon_1>0$, 个个自然数 $n$ 的后边一定另有自然数 $n'$, 使得

$$|s_{n'}-a|\geqslant\varepsilon_1. \tag{2.12}$$

再一推敲,这样的 $n'$ 不能仅有有限几个,不然的话,就有最后一个,比如说是 $N'$,那么 $N'+1$ 以后便没有使 $|s_{n''}-a|\geqslant\varepsilon_1$ 的 $n''$ 了. 理解到这一步以后,可以把(2.12)再改一下,写成更完整的命题:

对于某个 $\varepsilon_1>0$, 有无穷多个自然数

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots$$

使得 $|s_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_1$, 那么 $\{s_n\}$ 便不能以 $a$ 为极限.

或者说:

对于某个 $\varepsilon_1>0$, 如果 $\{s_n\}$ 有无穷多项

$$s_{n_1},\ s_{n_2},\ s_{n_3},\ \cdots,\ s_{n_k},\ \cdots$$

合于 $|s_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_1$, $\{s_n\}$ 便不能以 $a$ 为极限.

【例】 设 $s_n=(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$, 那么 $\{s_n\}$ 是

$$-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ -\frac{31}{32},\ \cdots$$

它的偶数项 $s_{2k}=1-\frac{1}{2^{2k}}$，当 $k$ 越大时越靠近 1. 奇数项

$$s_{2k-1}=-1+\frac{1}{2^{2k-1}}>-1,$$

$k$ 越大越靠近 $-1$(图 2-6). 从直观上看，$\{s_n\}$ 不能有极限，因为它的奇数项与偶数项分别密集在不同的两点 $-1$ 与 1 的附近，不能都和某个唯一的点 $a$ 靠近.

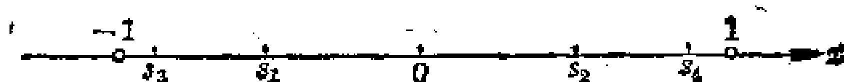



图 2-6

下面是这现象的代数阐述：

假设 $a$ 是任意一个实数.

$$|s_{2k}-a|+|s_{2k-1}-a|\geqslant|(s_{2k}-a)-(s_{2k-1}-a)|$$
$$=|s_{2k}-s_{2k-1}|=2-\frac{3}{2^{2k}}\geqslant\frac{5}{4}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

所以 $|s_{2k}-a|$ 与 $|s_{2k-1}-a|$ 二者之中，至少有一个不小于 $\frac{5}{8}$，就是

$$|s_{2k}-a|\geqslant\frac{5}{8},\quad 或\quad |s_{2k-1}-a|\geqslant\frac{5}{8}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

对于 $\frac{5}{8}$ 这个固定的数 $(\varepsilon_1)$，$\{s_n\}$ 有无穷多项对于 $a$ 的误差不能小于 $\frac{5}{8}$. 所以 $a$ 不是 $\{s_n\}$ 的极限. 又因为 $a$ 是任意的，所以任何实数不能是 $\{s_n\}$ 的极限，即是 $\{s_n\}$ 没有极限.

## 习 题 三

1. 按定义证明以下数列为无穷小：

(1) $\sin n/n$;　　(2) $\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$;

(3) $\frac{1}{n!}$;　　(4) $\frac{e^{-n}}{n}$;

(5) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$.

2. 如果变量 $x_n$ 能表为两项的和 $x_n=a+\alpha_n$，其中 $a$ 是常数，而 $\alpha_n$ 是无穷小. 试证 $a$ 为 $x_n$ 的极限.

3. 如果说满足下列条件的变量 $x_n$ 是无穷小，有无错误？错在哪里？举例说明.

   (1) 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在着自然数 $N$，当 $n>N$ 时，$x_n<\varepsilon$;

   (2) 对于任意的 $\varepsilon>0$，有无穷个 $x_n$ 满足 $|x_n|<\varepsilon$.

4. 证明一个数列 $\{s_n\}$ 不能有两个极限.

5. 证明 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 没有极限.

6. 从第一章 § 2.9 有界函数的定义，推出它的否定式，来建立无界函数的定义.

## 2.7 发散数列、无穷大

§ 2.1 里讲了 $\varepsilon$-$N$ 定义以后曾经说，没有极限的数列是发散数列. 这是对于 $\varepsilon$-$N$ 定义的否定，只是它否定得很笼统. 实际上发散数列还可以分类.

**定义 3** $\{s_n\}$ 是数列，如果对于任何(大的)正数 $M$，总有一个自然数 $N$，保证

$$|s_{N+k}|>M \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

成立，便说 $\{s_n\}$ 是无穷大，记作

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\infty \quad 或 \quad s_n\to\infty \quad (n\to\infty).$$

无穷大也是变量，或者说是变量的一种变化趋势，切不可与很大的量相混淆. 无穷大实际是发散数列，没有极限. 虽然 $s_n\to\infty$ 时常读作"$s_n$ 趋于无穷"，而 $\infty$ 仅是变量的一种变化情况，不是一个数. 如果 $\{s_n\}$ 是无穷大，从某项以后各项都是正数，即是说对于任意的正数 $M$，总有一个自然数 $N$，保证 $s_{N+k}>M$ 对于一切自然数 $k$ 成立，就说 $\{s_n\}$ 是正无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$；相仿地，如果无穷大 $\{s_n\}$ 从某项以后都是负数，

便说 $\{s_n\}$ 是负无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=-\infty$. 一般无穷大的变化是跳跃的，时而正，时而负．例如 $\{n\}$ 是 $+\infty$, $\{-n\}$ 是 $-\infty$, $\{(-1)^n n\}$ 是 $\infty$.

【例 1】 假设 $a>1$, 试证数列 $\{a^n\}$ 是无穷大.

【证】 $\{a^n\}$ 是正项数列．令 $a=1+\alpha$. 根据二项式定理

$$a^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+\cdots+\alpha^n.$$

因为右端各项都是正数，那么

$$a^n>n\alpha$$

对于任意正数 $M$, 只要 $n>\frac{M}{\alpha}$, 便有 $n\alpha>M$. 取 $N=\left[\frac{M}{\alpha}\right]$, 就可以保证 $a^{N+1}$, $a^{N+2}$, $\cdots$ 都大于 $M$. 这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} a^n=+\infty.$$

【例 2】 试证数列 $\{2^n\cdot\cos n\pi\}$ 是无穷大.

【证】 因为 $|2^n\cdot\cos n\pi|=2^n$, 根据例 1, $2^n\to+\infty$, 所以 $\{2^n\cdot\cos n\pi\}$ 是无穷大．这数列实际是

$$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots.$$

**定理 3** 假若 $\{s_n\}$ 是无穷大，常数 $a\neq0$, 那么 $\{as_n\}$ 也是无穷大．特别地 $\{-s_n\}$ 是无穷大.

【证】 因为 $\{s_n\}$ 是无穷大，那么对于任意的正数 $M$, 总有自然数 $N$, 保证 $|s_{N+k}|>\frac{M}{|a|}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 也就是 $|as_{N+k}|>M$. 所以 $\{as_n\}$ 是无穷大.

定理的后一半是显然的． ▌

**定理 4** 假若 $\{s_n\}$ 是无穷大，那么 $\{1/s_n\}$ 是无穷小；假若 $\{s_n\}$ 是无穷小，而且 $s_n\neq0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 那么 $\{1/s_n\}$ 是无穷大.

【证】 先证定理的第一部分. 假设 $\{s_n\}$ 是无穷大，那么它里边至多有有限个项等于零. 不然它就不是无穷大了. 根据 § 2.4 的第四条注解，可以认为一切 $s_n \neq 0$，$\{1/s_n\}$ 各项都有确定的值.

根据无穷大的定义，对于任意给定的 $M>0$，总有自然数 $N$，保证对于一切自然数 $k$，

$$|s_{N+k}|>M.$$

由此知道，对于一切自然数 $k$，

$$|1/s_{N+k}|<\frac{1}{M}.$$

这即是说：$\{1/s_n\}$ 里第 $N$ 项以后的一切项的绝对值都小于 $1/M$. 因为 $M$ 是任意指定的，那么可以认为 $1/M$ 是任意指定的；所以 $\{1/s_n\}$ 是无穷小.

第二部分的证明和这一样，建议读者作为练习去证明它. ▌

这定理所说的无穷大与无穷小的关系，很容易使我们感到它们好象是互为倒数的，很象是无穷大与无穷小的乘积等于 1，这是错误的推测. 因为无穷大与无穷小本来都是数列，两个数列的乘积是什么，我们还没有研究，怎么能说它们的乘积等于什么数呢. 必须定义了极限的运算以后，才可以谈这问题的是非(参阅 § 3.3).

无穷大虽然不是一个数，但是为了叙述上的方便，也认为数轴的无穷远处有一点，叫作*无穷远点*，并且把区间 $[-R, R]$ 以外的两个无穷区间 $(-\infty, -R)$ 和 $(R, +\infty)$ 叫做无穷远点的邻域，记作 $N(\infty, R)$. 更详细地说，把 $(-\infty, -R)$ 和 $(R, +\infty)$ 分别叫做无穷远点的右邻域及左邻域，记作 $N_+(\infty, R)$ 及 $N_-(\infty, R)$. 假若 $\{s_n\}$ 是 $+\infty$，$s_{N+1}$，$s_{N+2}$，…

都在左邻域 $N_-(\infty, R)$ 内(图 2-7); 假若 $\{s_n\}$ 是 $-\infty$, $s_{N+1}$, $s_{N+2}$, …便都在右邻域 $N_+(\infty, R)$ 内. 一般的无穷大 $s_{N+1}$, $s_{N+2}$, …分在左右两个邻域里.




图 2-7

这样规定了之后, 就可以把 $s_n \to a$ 与 $s_n \to \infty$ 统一在一种叙述法之下: $s_n$ 趋于 $a$, $s_n$ 趋于无穷.

**附注** 近来有些书把无穷大($\infty$)当作一个数添在实数系里,而把所得的实数系叫做*增广实数系*,同时把添上无穷远点的数轴,叫做*增广数轴*. 这办法在某些地方(例如叙述上,极限的计算上)确实方便一些. 然而在另一些地方也会引起误会. 所以即便这样倡议的人,也特别嘱咐: 在运算中使用 $\infty$, 必须给予另外的注意. 这意思是说: 发生疑问时,还必须用极限的原则对待 $\infty$.

【例 3】 设 $a>1$, $k>0$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^k}=+\infty$.

【证】 令 $a=1+\lambda$, $\lambda>0$. 根据二项式定理

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2,$$

当 $n>2$ 时, $n-1>\dfrac{n}{2}$, 那么

$$\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2=\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2>\frac{(a-1)^2}{4}n^2,$$

$$a^n>\frac{(a-1)^2}{4}n^2.$$

下边按 $k$ 的大小分三种情形证明:

(1) $k=1$. 从上边的不等式推得

$$\frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4} n,$$

不论正数 $M$ 多么大，只要 $n > \frac{4M}{(a-1)^2}$，便一定有 $\frac{a^n}{n} > M$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

这就证明了 $k=1$ 的情形

(2) $0<k<1$. 这时 $\frac{a^n}{n^k} = \frac{a^n n^{1-k}}{n} > \frac{a^n}{n}$，显然趋于 $+\infty$.

(3) $k>1$. 由 $a>1$ 得 $a^{\frac{1}{k}}>1$，根据(1)的结果可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n} = +\infty.$$

当 $n$ 充分大时，$\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n} > 1$，这时

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n}\right]^k > \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n},$$

因此
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

【例 4】 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

【证】 在例 3 推得的不等式 $a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2$ 中，令

$$a = \sqrt[n]{n},$$

便得出 $n > \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2$. 从而 $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$. 显然 $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$. 也就是

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

## 2.8 无界数列

下面讲另一类发散数列。

**定义 4** 对于任意给定的正数 $M$，如果数列 $\{s_n\}$ 里总有无穷多项在区间 $[-M, M]$ 之外．也就是说有无穷多个自然数 $n_1, n_2, n_3, \cdots$，使得

$$|s_{n_k}|>M \quad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

便说 $\{s_n\}$ 是无界数列．

这定义与无穷大定义的区别是：这里只要求有无穷多个 $s_{n_k}$ 满足 $|s_{n_k}|>M$，而不是象无穷大定义那样，要求号码 $n$ 大于 $N$ 的一切 $s_n$ 满足 $|s_n|>M$．现在这无穷多个号码 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 未必是连接着的自然数，而无穷大定义要用大于 $N$ 的一切自然数．

现在这定义也没有说 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 一定不是连接着的无穷多自然数，所以无界数列并不排斥无穷大．

【例】 $\{s_n\}=\{2^{(-1)^n n}\}$．把这数列具体写几项，是

$$\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{8}, 16, \frac{1}{32}, 64, \cdots,$$

它的一切偶数项构成数列 $\{2^{2k}\}$，即是

$$4, 16, 64, \cdots, 2^{2k}, \cdots,$$

这是 $+\infty$．所以不论 $M$ 多大，总有一个自然数 $K$，保证 $k>K$ 时，$2^{2k}>M$．这即是说，$\{2^{(-1)^n n}\}$ 第 $2K$ 项以后的一切偶数项都大于 $M$．所以 $\{s_n\}$ 无界．

$\{2^{(-1)^n n}\}$ 的一切奇数项构成数列 $\{2^{-(2k-1)}\}$，即是

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \cdots, \frac{1}{2^{2k-1}}, \cdots,$$

它的一切项都在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间．$\{2^{(-1)^n n}\}$ 里每个偶数项之后总还有无穷多个很小的数．所以对于任何正数 $M$，不会在某项以后的一切项都大于 $M$，因此 $\{2^{(-1)^n n}\}$ 不是无穷大．

从这例题来看，无界数列有无穷多个点在 $N(\infty, R)$ 里，

犹如$\{2^{(-1)^n n}\}$里包含着$\{2^{2k}\}$，在$k$很大时$2^{2k}$便在$N_-(\infty, R)$里．一般总还有无穷多点密集在某些有限点的近旁，犹如$\{2^{(-1)^n n}\}$里的$\{2^{-(2k-1)}\}$密集在原点的近旁，而无穷大则不能．这是一般无界数列与无穷大的区别．

## 2.9 有界数列

**定义 5** 如果有一个正数$M$，数列$\{s_n\}$中的一切项$s_n$都满足不等式$|s_n|<M$，便说$\{s_n\}$是*有界数列*．

一切$s_n$满足$|s_n|<M$，也就是一切$s_n$都在原点的邻域$(-M, M)$之内．这时一切$|s_n|$都小于$M$，因此$M$称为$\{s_n\}$的上界，同理$-M$称为$\{s_n\}$的下界．但是不要因此而误认为上界一定是正数，下界一定是负数(参阅下面的例1和例2)．要点是：上界不小于一切$s_n$，下界不大于一切$s_n$．数列有上界的话，上界便不止一个．若有一个上界$M$，那么大于$M$的任何数都是上界．下界也是这样．有界数列的定义还可以改进一下：

**定义 6** 如果有两个数$A$、$B$，$A<B$，而数列$\{s_n\}$的一切项满足不等式$A<s_n<B(n=1, 2, 3, \cdots)$，便说$\{s_n\}$是有界数列，$A$称为$\{s_n\}$的*下界*，$B$称为*上界*．

从几何上来看，就是$\{s_n\}$的一切点都在区间$(A, B)$之内．定义6与定义5没有本质的不同，可以互推．事实上把定义5里的不等式$|s_n|<M$改写为$-M<s_n<M$，便是定义6所要求的不等式．如果取$M=\max(|A|, |B|)$，那么$-M\leqslant A<s_n<B\leqslant M$，从而定义6里的$A<s_n<B$又换成了定义5里的$-M<s_n<M$．这说明两个定义互为因果．

显然定义5中的不等式$|s_n|<M$可以改写为$|s_n|\leqslant M$．同理，定义6里的不等式$A<s_n<B$的不等号“<”也可以改写

为“$\leqslant$”.

数列是在自然数集上定义的函数，所以有界数列是有界函数的特例．无界数列也是无界函数的特例．读者可以把上面的定义5和定义4同第一章§2.9的定义6及定义7对比一下．

【例1】 数列$\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$单调下降，它的一切项都大于2，首项3最大．所以

$$2<\frac{2n+1}{n}\leqslant 3 \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

2是这数列的下界，3是上界(这数列的下界2就不是负数).

【例2】 数列$\left\{\frac{1-2n}{n}\right\}$单调下降，首项$-1$最大，其余一切项都大于$-2$；所以

$$-2<\frac{1-2n}{n}\leqslant -1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

$-2$是下界，$-1$是上界(这数列的上界$-1$不是正数).

有的数列只有上界而无下界．例如一切负整数组成的数列有上界(比如$-1$就是一个上界)但是没有下界，约定说这种数列于上有界．一切正整数组成的数列有下界，而无上界．说这数列于下有界．必须上下两方都有界才是有界数列．一方有界另一方无界时，还是无界数列．

定义5与无穷小的定义有些相近，然而两者还是不同的．定义5只要求有一个正数$M$，并不要$M$任意小，即只要求一切点$s_n$不越出区间$(-M, M)$，并不要求$\{s_n\}$逼近0．所以有界数列未必是无穷小，然而无穷小却必是有界数列．更一般地说：

**定理5** 收敛数列是有界数列．

【证】 假设数列$\{s_n\}$收敛于$a$，那么对于$\varepsilon=1$，有一个自然数$N$，保证

$$|s_{N+k}-a|<1 \quad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

所以

$$a-1<s_{N+k}<a+1 \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

这时候$s_1, s_2, \cdots, s_N$一般不满足上面的不等式．假设$A$与$B$分别是$s_1, s_2, \cdots, s_N, a-1, a+1$中的最小者与最大者，即是

$$A=\min(s_1, s_2, \cdots, s_N, a-1, a+1);$$

$$B=\max(s_1, s_2, \cdots, s_N, a-1, a+1),$$

便得到不等式

$$A\leqslant s_n\leqslant B \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

这说明$\{s_n\}$有界． 】

反过来说，有界数列未必是收敛数列．例如§2.5例1中所讨论的数列$\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}$，当$n$为偶数时，

$$0<s_n=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

当$n$为奇数时，$-1<s_n=-1+\frac{1}{2^n}<0$．所以一切$s_n$满足不等式

$$-1<s_n<1.$$

这数列有界，然而它没有极限，即是发散的．

**附注** 数列是否有界，不在于前面任何有限几项，这因为有限个数总是有界的．所以有的书中说：如果$\{s_n\}$里有一项$s_N$，在$s_N$以后的一切项$s_n$满足不等式$|s_n|<M$（$M$是某个正数），就说$\{s_n\}$有界．由此可见，更改$\{s_n\}$的有限几项，不会影响它的有界性．

## 习 题 四

1. 举出一个有界的发散数列.
2. 假若数列 $\{s_n\}$ 的通项是

$$s_n=\begin{cases} n^2, & n\text{为偶数}; \\ \dfrac{1}{n}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

试证 $\{s_n\}$ 无界,而不是无穷大.

3. 按定义证明:数列 $\{s_n\}$ 为无穷大,已知 $s_n$ 是

(1) $\sqrt{n}$;　　(2) $n!$;

(3) $\ln n$;　　(4) $\dfrac{n^2+1}{2n+1}$;

(5) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

4. 假若 $\{x_n\}$ 是无穷大, $\{y_n\}$ 是有界变量. 试证 $\{x_n\pm y_n\}$ 是无穷大.

## 2.10 数列极限的存在

在§2.3里说过, $\varepsilon$-$N$ 定义不能判断数列的极限是否存在. 所以任意给出一个数列时, 还不能确定它是否收敛. 下面提出一个直观上容易接受的方法作为以后讨论的根据. 因为严格的证明,要占一定的篇幅,这里暂时不讲.

**定理 6** 单调有界数列必有极限.

单调有界数列包括两种情形:一种是单调上升而有上界;一种是单调下降而有下界. 这里单调上升包括单调不降, 单调下降包括单调不升.

定理6仅仅能判断单调数列有无极限, 是极限存在的充分条件, 不是必然条件. 判断非单调数列如 $\{1/(-2)^n\}$ 是否收敛? 它就无能为力了.

【例 1】 $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}$，其中每个 $p_i$ ($i=0, 1, 2, \cdots, n$) 是 0, 1, 2, …, 9 各数之一. 试证 $\{x_n\}$ 收敛.

【证】 $x_{n+1}=x_n+\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}\geqslant x_n$. $\{x_n\}$ 单调不降. 显然一切 $x_n<p_0+1$. $\{x_n\}$ 于上有界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

【例 2】 刘徽的割圆术（本章 §1.1 例 1）固然从实践上可以认为 $\pi$ 的近似值是 3.1416，但是还应该从理论上确定 $\pi$ 的存在，然后用定义确定圆周率这个概念.

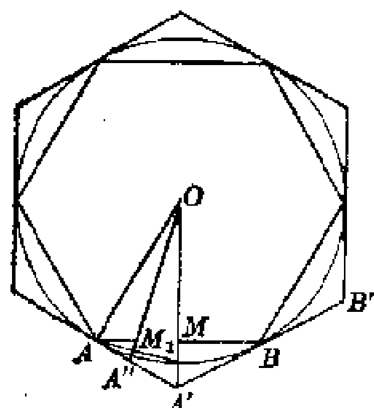


图 2-8

要证明正多边形周界之长的数列（沿用 §1.1 的记号）$\{p_{3\cdot 2^n}\}$

$$p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ \cdots,\ p_{3\cdot 2^n},\ \cdots$$

收敛，就要用现在的定理 6.

第一步：根据三角形两边之和大于第三边的定理，证明（图 2-8）

$$p_6<p_{12}<p_{24}<\cdots<p_{3\cdot 2^n}<\cdots. \tag{2.13}$$

第二步：用同样理论证明外切正多边形周界之长的数列 $\{P_{3\cdot 2^n}\}$ 单调下降，

$$P_6>P_{12}>P_{24}>\cdots>P_{3\cdot 2^n}>\cdots. \tag{2.14}$$

第三步：对于任意正整数 $k$，证明

$$p_k<P_k. \tag{2.15}$$

这因为 $OA$ 是外切正多边形的边心距. $OM$ 是内接正多边形（边数和外切的一样多）的边心距. $OM<OA$. 内接与外切的这两个多边形相似，它们的周长之比等于任意一对对应线段之比，所以

$$\frac{p_k}{P_k}=\frac{OM}{OA}<1, \tag{2.16}$$

因此 $p_k<P_k$.

第四步：从不等式(2.15)和(2.14)可知

$$p_{3\cdot2^n}<P_{3\cdot2^n}<P_6.$$

这表示 $\{p_{3\cdot2^n}\}$ 的一切项都小于 $P_6$，那么 $P_6$ 是 $\{p_{3\cdot2^n}\}$ 的上界．从(2.13)已知数列 $\{p_{3\cdot2^n}\}$ 单调上升．根据定理6，知道 $\{p_{3\cdot2^n}\}$ 有极限 $l$.

第五步：用同样的方法证明 $\{P_{3\cdot2^n}\}$ 有极限 $L$.

第六步：证明 $l=L$. 从(2.16)知道

$$0<1-\frac{p_6}{P_6}=1-\frac{OM}{OA}<\frac{AM}{OA}<\frac{AA'}{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$0<1-\frac{p_{12}}{P_{12}}=1-\frac{OM_1}{OA}<\frac{AM_1}{OA}<\frac{AA''}{OA}<\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

……………………………………………………

一般地，

$$0<1-\frac{p_{3\cdot2^n}}{P_{3\cdot2^n}}<\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}.$$

但是 $\left\{\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\right\}$ 是无穷小，因此

$$\lim_{n\to\infty}(p_{3\cdot2^n}/P_{3\cdot2^n})=1,$$

即是 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{3\cdot2^n}/\lim\limits_{n\to\infty}P_{3\cdot2^n}=1$，所以 $l=L$.

我们定义这极限 $l$ 为圆周之长.

$\left\{\frac{p_{3\cdot2^n}}{2}\right\}$ 也收敛，它的极限 $\frac{l}{2}$ 就是圆周与直径之比(因为圆的半径是1).

极限是否存在是一回事，如何去求极限是另一回事．一般地说，这两件事的关系是不大的.

§1.1 例3也是这样，应该在数列 $\{V_n\}$[即数列(1.7)]收

敛的基础上，定义它的极限作为三棱锥的体积.

一般地说，凡是涉及无限次度量，不论是长度、面积、体积、角、弧等等都需要用极限理论核实.

【例 3】 已知 $x_1=\sqrt{2}$,

$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}. \tag{2.17}$$

试证 $\{x_n\}$ 收敛.

(2.17)这样的等式，叫做递推公式. 虽然这里没有给出数列的通项，但是有了递推公式，便可以写出数列的任何一项，递推公式就起到通项的作用. 按(2.17)把数列写几项就是

$$x_1=\sqrt{2},\qquad x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_3=\sqrt{2+x_2}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$x_4=\sqrt{2+x_3}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\cdots$$

$x_1$ 有一层根号，$x_2$ 有两层，$x_3$, $x_4$ 分别有三层、四层，依此类推，$x_n$ 有 $n$ 层根号，

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(n\text{层根式})}.$$

解：显然，这里的数列是单调上升的，即是

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots,$$

并且

$$x_1=\sqrt{2}<2,$$

$$x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2,$$

$$x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2.$$

可见 2 是 $\{x_n\}$ 的上界.

$\{x_n\}$ 单调上升而且有上界，所以收敛.

判断一般数列是否收敛的定理有:

**定理 7**(柯西) 数列 $\{s_n\}$ 收敛的必然且充分的条件是：对于任意小的正数 $\varepsilon$，总有一个足够大的自然数 $N$，保证 $s_N$ 以后的任意两项 $s_m$, $s_{m'}$ ($m>N$, $m'>N$, $m\neq m'$) 满足不等式

$$|s_m-s_{m'}|<\varepsilon.$$

条件的充分性不易证明，从略. 这里只把必然性证一下. 假设 $\{s_n\}$ 收敛于 $a$，那么对于任意小的正数 $\varepsilon$，一定有一个自然数 $N$，保证 $n>N$ 时，

$$|s_n-a|<\varepsilon/2.$$

现在 $m>N$, $m'>N$，所以 $|s_m-a|<\varepsilon/2$, $|s_{m'}-a|<\varepsilon/2$. 因此

$$\begin{aligned}|s_m-s_{m'}|&=|(s_m-a)-(s_{m'}-a)|\\&\leqslant|s_m-a|+|s_{m'}-a|<\varepsilon.\end{aligned}$$ ▌

【例 4】 假设 $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$. 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

【证】 假设 $k$ 是任意自然数. 令 $m=n+k$,

$$x_m=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}+\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}$$

那么

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k}}\\&=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

要 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$，这又只需 $n>\dfrac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}$. 令

$$N=\left[\frac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}\right],$$

便能保证 $m>N$, $n>N$ 时 $|x_m-x_n|<\varepsilon$. 所以 $\{x_n\}$ 收敛.

【例 5】 假设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛.

解: 假设 $m>n$, 那么

$$x_m-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

$$>\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}=\frac{m-n}{m}.$$

只要 $m=2n$, $x_m-x_n$ 便 $>\frac{1}{2}$. 那么不论 $N$ 多大, 任意取一个 $n>N$, 再取 $m=2n$, 便有 $|x_m-x_n|=x_m-x_n>\frac{1}{2}$. 所以 $\{x_n\}$ 发散.

$\{x_n\}$ 各项都是正数, 又单调上升, 已知它是发散的, 所以 $x_n\to+\infty$.

我们有两次说到微分法与积分法都是无穷小运算, 每一步这样的运算, 包含无穷多道手续. 现在所讲的数列的收敛性, 就是实现这无穷多道手续的方法. 这方法只不过是为了使用"趋于稳定"的数列, 而用 $\varepsilon$-$N$ 定义把"趋于稳定"的意义形式化, 以便用它来判断是否收敛而已. 判断了一个数列是收敛的, 再把极限求出来, 就是进行了一个无穷多道手续的运算.

## 习 题 五

1. 仿照 §2.10 例 2, 定义圆的面积.

[提示: 内接正 $3\cdot 2^n$ 边形面积序列 $\{q_{3\cdot 2^n}\}$ 单调上升; 外切正 $3\cdot 2^n$

边形面积序列 $\{Q_{3\cdot 2^n}\}$ 单调下降，分别有上界、下界，各收敛于 $q$、$Q$. 然后证明 $\left\{1-\frac{q_{3\cdot 2^n}}{Q_{3\cdot 2^n}}\right\}$ 是无穷小，借此推得 $\left\{\frac{q_{3\cdot 2^n}}{Q_{3\cdot 2^n}}\right\}$ 收敛于 1，从而 $q/Q=1$.]

2. 设 $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 收敛.
3. 设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 收敛.
4. 设 $x_0=1$, $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 收敛.
5. 假设 $\{a_n\}$ 有界，$|q|<1$，$x_n=\sum_{k=0}^{n}a_kq^k$，用柯西定理检查 $\{x_n\}$ 的收敛性.
6. 假设 $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}$. 用柯西定理检查 $\{x_n\}$ 的收敛性.

## 第三节　数列极限的运算

以前所讲的数列的收敛问题，仅是一个数列自身的性质，没有涉及数列与数列的关系. 如果两个或多个收敛数列有某种关系时，它们的极限会有什么相应的关系呢？前节定理 4 就属于这类问题. 本节将要在这方面讨论更为广泛的关系.

### 3.1　收敛数列的性质

前节定理 1 说过：$\{s_n\}$ 是无穷小时，$\{as_n\}$ 还是无穷小. 这就是无穷小的一个性质. 为了讨论极限的运算，我们再介绍收敛数列的两个性质.

**定理 1**　假设 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，$b<a<c$，那么一定有一个自然数 $N$，保证不等式

$$b<x_{N+k}<c$$

对于一切自然数 $k$ 成立.

【证】 假定 $\varepsilon=\min(c-a,\ a-b)$. 由于 $x_n\to a$, 必有自然数 $N$, 保证

$$|x_{N+k}-a|<\varepsilon \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

即是

$$a-\varepsilon<x_{N+k}<a+\varepsilon \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

但是 $\varepsilon\leqslant c-a$, $\varepsilon\leqslant a-b$, 那么 $b\leqslant a-\varepsilon$, $a+\varepsilon\leqslant c$. 所以

$$b<x_{N+k}<c \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \ ▌$$

**推论 1** 假设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a\neq 0$, 那么一定有一个自然数 $N$, 保证不等式

$$|x_{N+k}|>|a|/2 \tag{3.1}$$

对于一切自然数 $k$ 成立.

【证】 $a>0$ 时, $\frac{a}{2}<a$, 那么有一个自然数 $N$, 保证

$$x_{N+k}>\frac{a}{2} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

这是(3.1)的一个方面——$a>0$ 的情形.

$a<0$ 时, $a<\frac{a}{2}<0$, 那么有一个自然数 $N$, 保证

$$x_{N+k}<\frac{a}{2}<0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

这是(3.1)的另一个方面——$a<0$ 的情形. 从这不等式取绝对值, 也就是两端都变号, 得

$$|x_{N+k}|>|a|/2 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

这就是概括以上两种情形的(3.1). ▌

**推论 2** 假设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$, 数列 $\{y_n\}$ 收敛于 $b$, 而且对于一切自然数 $n$, $x_n\leqslant y_n$, 那么 $a\leqslant b$.

【证】 假若不然, 而是 $a>b$, 那么当 $n$ 大于某个自然数 $N$ 时, 将会 $x_n>y_n$, 这与假设相矛盾. ▌

**定理2** 假设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 三个数列的对应项满足不等式

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \tag{3.2}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

那么必然

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

【证】 既然 $x_n \to a$, 那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 一定有一个自然数 $N_1$, 保证

$$|x_{N_1+k}-a|<\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

又因为 $z_n \to a$, 那么对于同一个 $\varepsilon$, 一定有一个自然数 $N_2$, 保证

$$|z_{N_2+k}-a|<\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

如果 $N=\max(N_1, N_2)$, 那么对于一切自然数 $k$,

$$|x_{N+k}-a|<\varepsilon \quad 与 \quad |z_{N+k}-a|<\varepsilon$$

同时成立. 把这两个不等式改写为

$$a-\varepsilon<x_{N+k}<a+\varepsilon \quad 与 \quad a-\varepsilon<z_{N+k}<a+\varepsilon$$
$$(k=1, 2, 3, \cdots),$$

再与(3.2)结合起来, 就得到

$$a-\varepsilon<x_{N+k}\leqslant y_{N+k}\leqslant z_{N+k}<a+\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

从而推得

$$|y_{N+k}-a|<\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

即是

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a. \quad ▌$$

**推论** 假若 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 满足不等式

$$a\leqslant y_n \leqslant z_n \quad 或 \quad z_n \leqslant y_n \leqslant a \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 那么一定 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

定理2的假设条件较强, 所得的结论也多些. 它不仅能断定 $\{y_n\}$ 收敛, 而且能知道它的极限.

【例】 求 $\left\{\dfrac{3-n}{n^2}\right\}$ 的极限.

解: $\dfrac{3-n}{n^2}>\dfrac{-n}{n^2}=-\dfrac{1}{n}$. 当 $n>3$ 时, $\dfrac{3-n}{n^2}<0$. 因此

$$-\frac{1}{n}<\frac{3-n}{n^2}<0.$$

然而 $\dfrac{-1}{n}\to 0$, 所以 $\dfrac{3-n}{n^2}\to 0$.

## 3.2 无穷小的运算

**定义 1** 两个无穷小对应项的和、差、积、商作成的数列, 叫做这两个无穷小的和、差、积、商.

**定理 8** 两个无穷小的和与差都是无穷小.

【证】 假设两个无穷小是 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 那么它们的和与差是 $\{x_n\pm y_n\}$. 对于任意小的数 $\varepsilon>0$, 总有一个自然数 $N_1$, 保证

$$|x_{N_1+k}|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots);$$

还有一个自然数 $N_2$, 保证

$$|y_{N_1+k}|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

如果取 $N=\max(N_1,\ N_2)$, 则

$$|x_{N+k}\pm y_{N+k}|\leqslant|x_{N+k}|+|y_{N+k}|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

所以 $\{x_n\pm y_n\}$ 是无穷小. ▌

这定理可以简单地叙述为: 两个无穷小的代数和是无穷小. 用数学归纳法不难证明:

**推论** 任意有限个无穷小的代数和是无穷小.

这推论的假设条件要求无穷小的个数有限，注意这一点不得忽略．如果无穷小的个数不固定，而是随着变量的变化而无限增多的话，这推论则未必成立．将来在积分理论中经常出现这种情形．

**定理 4** 假设数列 $\{x_n\}$ 有界，$\{y_n\}$ 是无穷小，那么 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小．

【证】 因为 $\{x_n\}$ 有界，那么有一个正数 $M$，使得

$$|x_n|<M \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

因为 $\{y_n\}$ 是无穷小，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，总有一个自然数 $N$，保证

$$|y_{N+k}|<\varepsilon/M \quad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

由此

$$|x_{N+k}y_{N+k}|<\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$． ▌

**推论** 两个无穷小的乘积是无穷小．

【证】 假设 $x_n\to0$，$y_n\to0$，那么总有一个自然数 $N$，保证 $n$ 大于 $N$ 时，$|x_n|<1$．如果只考虑 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 中第 $N$ 项以后的一切项，这两个数列便已经符合定理 4 的假设条件了． ▌

很容易证明任何有限个无穷小的乘积，还是无穷小．

两个无穷小之商没有确定的结果．例如

(1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{k}{10^n}\right\}$，$k\neq0$，$\{y_n\}=\left\{\dfrac{1}{10^n}\right\}$ 时，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=k$．

(2) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{10^n}\right\}$，$\{y_n\}=\left\{\dfrac{1}{10^{2n}}\right\}$ 时，

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{10^n\}=\infty.$$

(3) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{10^{2n}}\right\}$, $\{y_n\}=\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$时,

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\left\{\frac{1}{10^n}\right\}=0.$$

## 3.3 数列极限的四则运算

**定理 5** 假设 $x_n\to a$, $y_n\to b$, 那么 $x_n\pm y_n\to a\pm b$.

【证】 根据§2.5定理2, $\{x_n-a\}$, $\{y_n-b\}$都是无穷小. 根据§3.2定理3, 知道

$$\{(x_n\pm y_n)-(a\pm b)\}=\{(x_n-a)\pm(y_n-b)\}$$

是无穷小. 根据§2.5定理2, 知道

$$x_n\pm y_n\to a\pm b\quad(n\to\infty).\ \blacksquare$$

**推论** 假设 $x_n\to a$, $b$是常数,那么

$$x_n\pm b\to a\pm b,$$

$$b-x_n\to b-a.$$

**定理 6** 假设 $x_n\to a$, $y_n\to b$, 那么 $x_ny_n\to ab$.

【证】 这就是说要证明 $x_ny_n-ab$ 是无穷小.

$$x_ny_n-ab=(x_n-a)y_n+a(y_n-b).\qquad(3.3)$$

由于$\{y_n\}$收敛,那么$\{y_n\}$有界(§2.9定理5), 因而有一个正数$c$,保证

$$|y_n|<c\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

于是

$$|x_n-a|\,|y_n|<c|x_n-a|$$

是无穷小, 这因为$|x_n-a|$是无穷小(§2.5定理1). 同理$a(y_n-b)$是无穷小. (3.3)右端两项都是无穷小,所以两者之和还是无穷小(§3.2定理3). 因此 $x_ny_n\to ab$. $\blacksquare$

**推论** 假设 $x_n\to a$, $b$是常数,那么

$$bx_n\to ba.$$

$b\neq 0$ 时，自然又可以说 $\frac{x_n}{b}\to\frac{a}{b}$.

**定理 7** 假设 $x_n\to a$, $y_n\to b$, $b\neq 0$. 那么

$$\frac{x_n}{y_n}\to\frac{a}{b}.$$

【证】 这要证明 $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}$ 是无穷小.

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(x_n-a)-a(y_n-b)}{by_n}, \quad (3.4)$$

根据 §3.1 的定理 1 的推论 1，有一个自然数 $N_1$，保证当 $n>N_1$ 时，

$$|y_n|>|b|/2, \quad (3.5)$$

从而 $$|by_n|>b^2/2, \quad n>N_1.$$

根据 §2.5 定理 2、定理 1 与本节定理 3，知道 (3.4) 右端分子是无穷小，那么对于任意小的正数 $\varepsilon$，一定有一个自然数 $N_2$，保证当 $n>N_2$ 时，

$$|bx_n-ay_n|<\frac{1}{2}b^2\varepsilon.$$

所以当 $n>N=\max(N_1, N_2)$ 时，$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|<\varepsilon$. 这就证明了本定理. 】

**推论** 假设 $a$ 是常数，$y_n\to b$, $b\neq 0$，那么

$$\frac{a}{y_n}\to\frac{a}{b}.$$

【例 1】 假设 $a_i\,(i=0, 1, \cdots, k)$, $b_j\,(j=0, 1, \cdots, l)$ 都是常数，$a_0b_0\neq 0$. 讨论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+b_2n^{l-2}+\cdots+b_l}.$$

解：$f(n)=\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+b_2n^{l-2}+\cdots+b_l}$

$$=n^{k-l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots+\frac{b_l}{n^l}}=n^{k-l}\varphi(n).$$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无穷小，那么$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$, $\cdots$, $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$, $\cdots$, $\left\{\frac{1}{n^l}\right\}$都是无穷小．从而$\left\{\frac{a_i}{n^i}\right\}$, $\left\{\frac{b_i}{n^i}\right\}$都是无穷小，进而

$$\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}\quad 与 \quad \frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots+\frac{b_l}{n^l}$$

是无穷小．于是当$k=l$时，由定理 7 知道

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\frac{a_0}{b_0}.$$

根据§2.9 定理 5，知道$\varphi(n)$是有界数列．

当$k<l$时，$\{n^{k-l}\}$是无穷小，根据本节定理 4，知道

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=0.$$

当$k>l$时，$\{n^{k-l}\}$是无穷大．由定理 1 的推论知道，一定有一个自然数$N_1$保证当$n>N_1$时

$$|\varphi(n)|>\frac{1}{2}\left|\frac{a_0}{b_0}\right|.$$

对于任意大的正数$M$，一定有一个自然数$N_2$，保证当$n>N_2$时，

$$n^{k-l}>2M\left|\frac{b_0}{a_0}\right|.$$

于是当$n>N=\max(N_1, N_2)$时，$|f(n)|>M$．这说明

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\infty.$$

总结以上的讨论，得

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=\begin{cases}0, & 若\ k<l;\\ a_0/b_0, & 若\ k=l;\\ \infty, & 若\ k>l.\end{cases}$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sin n+\frac{n-1}{3n^2+2}\right\}$.

解：$\frac{1}{n}\to 0$，$\{\sin n\}$ 有界，所以 $\frac{1}{n}\sin n\to 0$. 根据例 1：

$$\frac{n-1}{3n^2+2}\to 0.$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sin n+\frac{n-1}{3n^2+2}\right\}=0.$$

【例 3】 求 § 2.10 例 3 中数列 $\{x_n\}$ 的极限.

解：从那里的递推公式 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，求得

$$x_n^2=2+x_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots),\tag{3.6}$$

这无穷多等式的左右两端各是一个数列，即是 $\{x_nx_n\}$ 和 $\{2+x_{n-1}\}$. 根据定理 6 与定理 5 的推论，这两个数列都收敛. 假设 $\{x_n\}$ 的极限(§ 2.10 例 3 已经证明了它的存在)是 $x$. 那么 $\{x_nx_n\}$ 的极限是 $x^2$，$\{2+x_{n-1}\}$ 的极限是 $2+x$. 因为 $\{x_nx_n\}$ 与 $\{2+x_{n-1}\}$ 的对应项相等，所以它们的极限相等，于是得到一个关于 $x$ 的二次方程

$$x^2=2+x.\tag{3.7}$$

这方程的两个根是 2 和 $-1$. 既然一切 $x_n$ 都不小于 $\sqrt{2}$，那么 $\{x_n\}$ 的极限不能是 $-1$. 由此断定 $x=2$. 这就是所求的极限值.

**附注** 从(3.6)到(3.7)的过程，寻常说是从(3.6)的两端取极限而得(3.7).

【例 4】 已知 $0<a<1$，求证 $\sqrt[n]{a}\to 1$.

【证】 由 $0<a<1$, 得 $a^{-1}>1$, $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}}$. 根据 §2.3 例 4 知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-1}}=1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-1}}}=\frac{1}{1}=1.$$

## 3.4 附录一 平行截割定理

我们在初等几何里都学过下面这条定理(见数理化自学丛书《平面几何》第二册):

平行于三角形的一边作直线，一定将三角形的其他两边分成四个成比例的线段.

假设 $CD$ 平行于 $\triangle OAB$ 的底边 $AB$ (图 2-9), 交 $OA$ 于 $C$, 交 $OB$ 于 $D$.

如果 $OC$ 与 $CA$ 可通约(图 2-9 之左图), 那么

$$\frac{OC}{CA}=\frac{OD}{DB}$$

是初等几何里证明了的.

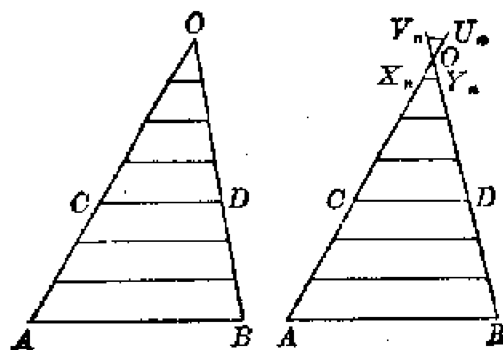



图 2-9

现在证明 $OC$ 与 $CA$ 不可通约的情形(图 2-9 右图). 所谓 $OC$ 与 $CA$ 不可通约，就是不论用 $CA$ 的几分之一去度量 $OC$，总不能量若干次恰好量完. 现在用 $s_n=CA/2^n$ 度量 $CA$, 量 $2^n$ 次自然会量完. 从 $C$ 点开始度量 $CO$, 假设量 $m_n$ 次到 $X_n$, 还剩一段 $X_nO$, 但是再量一次便越过 $O$ 点到了 $CO$ 延长线上的点 $U_n$. $O$ 在 $X_n$ 与 $U_n$ 之间. 将 $AU_n$ 分成

$(2^n+m_n+1)$个等段．过每个分点作一条平行于 $AB$ 的直线．这些直线在 $BO$ 上截出 $2^n+m_n+1$ 个长度都等于 $t_n$ 的线段．过 $X_n$ 及 $U_n$ 的直线交 $BO$ 及其延长线于 $Y_n$ 及 $V_n$．$O$ 在 $Y_n$ 与 $V_n$ 之间．这时

$$\frac{CX_n}{AC}=\frac{m_ns_n}{2^ns_n}=\frac{m_n}{2^n}=\frac{m_nt_n}{2^nt_n}=\frac{DY_n}{BD}. \tag{3.8}$$

令 $n=1, 2, 3, \cdots$，则得线段列 $\{CX_n\}$ 及 $\{DY_n\}$ 以及数列 $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$.

$$CO-CX_n<s_n=\frac{AC}{2^n};\quad DO-DY_n<t_n=\frac{BD}{2^n}.$$

对于任意小的线段 $\varepsilon$，总有一个自然数 $N$，保证 $s_{N+1}$, $t_{N+1}$, $s_{N+2}$, $t_{N+2}$, $\cdots$都小于 $\varepsilon$．这说明

$$CX_n\to CO;\quad DY_n\to DO.$$

由§3.3定理6推论知道

$$\frac{CX_n}{AC}\to\frac{CO}{AC};\quad \frac{DY_n}{BD}\to\frac{DO}{BD}. \tag{3.9}$$

从(3.8)知道 $\left\{\frac{CX_n}{AC}\right\}$ 与 $\left\{\frac{DY_n}{BD}\right\}$ 都由数列$\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$表示．但是$\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$收敛，怎见得呢？

$$CX_n=m_ns_n=\frac{m_n}{2^n}AC,$$

$$CX_{n+1}=m_{n+1}s_{n+1}=\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}}AC.$$

已知 $CX_n\leqslant CX_{n+1}$，那么 $\frac{m_n}{2^n}\leqslant\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}}$，于是 $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$ 单调上升．并且

$$CX_n<CU_1=(m_1+1)AC/2,$$

从而

$$\frac{m_n}{2^n}<\frac{CU_1}{AC}=\frac{m_1+1}{2}.$$

可见 $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$ 于上有界，由此断定 $\left\{\frac{m_n}{2^n}\right\}$ 收敛于某数 $q$．根据(3.8)式知道 $\left\{\frac{CX_n}{AC}\right\}$ 与 $\left\{\frac{DY_n}{BD}\right\}$ 都以 $q$ 为极限．再从(3.9)来看，必然

$$\frac{CO}{AC}=\frac{DO}{BD}.$$

## 3.5 附录二 矩形的面积

长方形 $ABCD$ 的一边 $a$ 是单位线长的 $\frac{1}{n}$，另一边 $b$ 是 $\frac{1}{q}$($n$, $q$ 都是正整数)时，这个长方形的面积是 $\frac{1}{nq}$. 原因是 $nq$ 个这样的长方形恰好是一个面积单位(图 2-10 之左图). 进而知道，$a$ 为有理数 $\frac{m}{n}$，$b$ 为有理数 $\frac{p}{q}$ 时，面积为

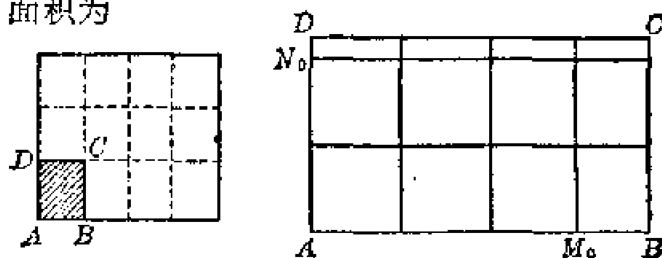



图 2-10

$$\frac{mp}{nq}=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=ab,$$

当 $a$、$b$ 两数或二者之一是无理数时，长方形面积仍然等于 $ab$. 这需要用收敛数列来证明. 假设 $a$、$b$ 的小数表示法是

$$a=m_0\cdot m_1m_2m_3\cdots,\quad b=n_0\cdot n_1n_2n_3\cdots$$

长度单位是 cm，那么

$$m_0\text{cm}\leqslant a<(m_0+1)\text{cm},\quad n_0\text{cm}\leqslant b<(n_0+1)\text{cm}$$

$$m_0\cdot m_1\text{cm}\leqslant a<\left(m_0\cdot m_1+\frac{1}{10}\right)\text{cm},\quad n_0\cdot n_1\text{cm}\leqslant b<\left(n_0\cdot n_1+\frac{1}{10}\right)\text{cm}$$

$$m_0\cdot m_1m_2\text{cm}\leqslant a<\left(m_0\cdot m_1m_2+\frac{1}{100}\right)\text{cm},\quad n_0\cdot n_1n_2\text{cm}\leqslant b<\left(n_0\cdot n_1n_2+\frac{1}{100}\right)\text{cm}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

于是

$$\left.\begin{aligned}
&m_0n_0\text{cm}^2\leqslant ABCD<(m_0+1)(n_0+1)\text{cm}^2\\
&(m_0\cdot m_1)(n_0\cdot n_1)\text{cm}^2\leqslant ABCD\\
&\quad<\left(m_0\cdot m_1+\frac{1}{10}\right)\left(n_0\cdot n_1+\frac{1}{10}\right)\text{cm}^2\\
&(m_0\cdot m_1m_2)(n_0\cdot n_1n_2)\text{cm}^2\leqslant ABCD\\
&\quad<\left(m_0\cdot m_1m_2+\frac{1}{100}\right)\left(n_0\cdot n_1n_2+\frac{1}{100}\right)\text{cm}^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

这组不等式左端的各系数是数列

$$\{(m_0\cdot m_1\cdots m_k)(n_0\cdot n_1\cdots n_k)\}\quad (k=0,1,2,\cdots),\qquad (3.11)$$

这是数列 $\{m_0\cdot m_1\cdots m_k\}$ 与 $\{n_0\cdot n_1\cdots n_k\}$ 的乘积. 已知这两个数列的极限是 $a$ 与 $b$, 所以(3.11)收敛于 $ab$.

(3.10)右端各系数是数列

$$\left\{\left(m_0\cdot m_1\cdots m_k+\frac{1}{10^k}\right)\left(n_0\cdot n_1\cdots n_k+\frac{1}{10^k}\right)\right\},$$

它与(3.11)之差是

$$\left\{\frac{m_0\cdot m_1\cdots m_k}{10^k}\right\}+\left\{\frac{n_0\cdot n_1\cdots n_k}{10^k}\right\}+\left\{\frac{1}{10^{2k}}\right\}\quad (k=0,1,2,\cdots),\qquad (3.12)$$

其中: $\left\{\frac{m_0\cdot m_1\cdots m_k}{10^k}\right\}=\{m_0\cdot m_1\cdots m_k\}\cdot\left\{\frac{1}{10^k}\right\}$ 的极限是 $a\cdot 0=0$. 同理 $\left\{\frac{n_0\cdot n_1\cdots n_k}{10^k}\right\}$ 也收敛于 0. 显然 $\left\{\frac{1}{10^{2k}}\right\}$ 是无穷小. 因此(3.12)也收敛于 $ab$.

(3.10)的一串不等式两端都趋于 $ab$. 我们就把这个共同的极限 $ab$ 定义为 $ABCD$ 的面积.

## 习　题　六

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 且 $a<b$. 试证可以找到一个自然数 $N$, 使得不等式 $x_n<y_n$ 对于一切大于 $N$ 的号码 $n$ 都成立.
2. 若变量 $x_n$ 与 $y_n$ 分别以 $a$ 与 $b$ 为极限. 又若从某个 $n$ 起, 不等式 $x_n\geqslant y_n$ 成立. 试证 $a\geqslant b$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $r$ 是正整数. 试证
$$\lim_{n\to\infty}x_n^r=a^r.$$
4. 求以下数列 $\{x_n\}$ 的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1-n+2n^2}{1-n^2}$;　　(2) $x_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n^3+n^2-1}$;

(3) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;　　(4) $x_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+c}{a_1n^2+b_1n+c_1}$　$(a_1\neq 0)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(an+\alpha)(bn+\beta)}{(a_1n-\alpha)(b_1n-\beta)}\quad(a_1b_1\neq0)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{an+b}\quad(a\neq0)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+5-6+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$.

5. 求本章习题五中第2、3、4题数列的极限。

6. 试证圆心角和它所对的弧有同样的量数。

7. 根据§3.1定理2求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$;

[提示: $3^n<1^n+2^n+3^n<3^n\cdot3$(见§2.3例4)]

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

# 第二章小结

微积分的运算都是极限运算．而数列的极限不论从历史的发展上看，还是从数学的结构上看，都是极限理论的基础．人类的认识活动总是由个别到一般，由具体到抽象．这一章就是按这原则安排的．

我们最关心的是数列的收敛性，和这紧密连结着的是 $\varepsilon$-$N$ 定义．这定义是从无穷数列之中分辨收敛数列的准则，而实际上，也有计算的功能——收敛数列的极限要由它决定．懂得这个概念，就容易接受以后的更一般的概念，以及微积分的大多数概念．因此 $\varepsilon$-$N$ 定义是第二节的主题，也可以说是全章的眼目．无穷小是特种收敛数列，因其有特别用途，所以特别提明．判断数列的极限是否存在，也是重要问题，限于篇

幅，不能详细讨论．

第二节的内容好象头绪很多，其实从 §2.6 到 §2.9 无非是从反面来衬托收敛概念，让我们更好地去认识正面．其中趋于无穷大的发散数列较为有用，也是值得一提的．

第三节进入运算，是数列发挥作用的部分．对于四则运算的定理，可能有人以为这些结论不讲也知道，但是那是直观的感性认识，不是从逻辑上认识的．我们要一步一步地跟着逻辑走，马虎不得．最末两小段是数列在初等数学里的应用．关于这方面还有好多类似的问题，这里仅仅是提醒一下：初等数学不能与高等数学割断关系．

# 第三章

# 函数的极限与连续

## 第一节 函数的极限

### 1.1 函数的极限

第二章第一节例2曾借自由落体运动在第二秒之末的瞬时速度提出数列的极限. 在这例题里计算了从 $t=2$ 秒到 $t=2+\frac{1}{n}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 秒内的一串平均速度

$$\{v_n\}=\left\{\frac{4n+1}{2n}g\right\}=\left\{\left(2+\frac{1}{2n}\right)g\right\}.$$

从这里看到 $n\to\infty$ 时, $v_n\to 2g$, 便承认了第二秒之末的瞬时速度是 $2g$. 也曾经建议读者再从 $t=2-\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 到 $t=2$ 计算一串平均速度, 验证所得极限还是 $2g$. 尽管如此, 能保证任何人按任何趋于2的数列(时刻序列) $\{t_n\}$ 求得的平均速度序列都收敛于 $2g$ 吗? 所以以前所作的结论不是没有问题的. 我们希望得到这样一条保证: 不管按怎样的时刻序列(以2为极限)求得的平均速度序列都收敛于同一个数. 必须这样, 我们才可以放心地接受这个共同的极限值作为第二秒之末的瞬时速度.

前面的解法所以有破绽, 是由于用数列

$$\{t_n\}=\left\{2+\frac{1}{n}\right\} \quad 或 \quad \left\{2-\frac{1}{n}\right\}$$

比拟时间变化不够恰当. 因为时间是连续地变的, 而数列 $\{t_n\}$

是跳跃地变化的，显然，任何一个数列 $\{t_n\}$ 不能表示时间 $t$ 的连续变化．更重要的是

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

随着 $t$ 而连续地变化．求平均速度的一般公式

$$\bar{v}=\frac{g(t^2-4)}{2(t-2)}$$

也是连续变化的，它也是 $t$ 的函数．我们必须能从这个函数考虑 $t$ 逼近于 2 时的合理数值，才可以承认这个数值是 $t=2$ 时的瞬时速度．这就是函数的极限．

$t$ 逼近于 2，用 $t\to2$ 表示．如果限定 $t$ 由大于 2 的值逐渐（连续地）变小而逼近 2，也就是从 2 的右侧逼近 2，就用 $t\to2+$ 表示；如果限定 $t$ 由小于 2 的值逐渐变大而逼近 2，也就是从 2 的左侧逼近 2，就用 $t\to2-$ 表示．其他一般情形，例如 $t$ 左右摆动地逐渐稳定在 2 上，或者不加限制时，都用 $t\to2$ 表示．

自变量的变化有不同的过程，函数的极限也有不同的说法．下面逐条地说明它们．

以前曾定义：$a$ 点的 $\delta$ 邻域 $N(a,\ \delta)$ 是满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切 $x$ 值．现在又要用到满足不等式

$$0<|x-a|<\delta$$

的一切 $x$ 值．这不等式比 $N(a,\ \delta)$ 只少 $x=a$ 一点．我们把这叫做 $a$ 点的空心 $\delta$ 邻域，记作 $\mathfrak{N}(a,\ \delta)$．

以前曾把无穷大叫做数轴上的无穷远点．现在我们相对地说，数轴上的实数是有限数，它的对应点叫做有限点．

现在再引进一个符号："$\in$"读作"属于"．例如 $a<x<b$ 时，$x$ 在区间 $(a,\ b)$ 内，便记作 $x\in(a,\ b)$．$x$ 在 $a$ 的 $\delta$ 空心邻

域里，记作 $x\in\mathfrak{N}(a,\delta)$。

## 1.2 有限点上的极限

设有 $x$ 的函数

$$y=f(x)$$

在 $x$ 按某种程序变化时，函数的值 $y$ 便有对应的变化程序．当 $x\to a$ 时，$y$ 的变化情况当然因函数不同而不同．现在在函数的各种变化情形中，抽出几种有用的情形，给它们规定专门的术语．

为了让读者从感性认识入手，先观察前段提出的瞬时速度问题．函数

$$\bar{v}(t)=\frac{g(t^2-4)}{2(t-2)} \tag{1.1}$$

表示时间从 2 到 $t$ 之间的平均速度．$t=2$ 时这函数无意义，这是符合事实的——从第 2 秒之末到第二秒之末的平均速度是无意义的．首先要撇开 $t=2$ 才能谈 $\bar{v}(t)$ 的值．但是只要 $t\neq 2$ 就可以将(1.1)右端分子分母的公因子 $t-2$ 约去，得到

$$\bar{v}(t)=\frac{g}{2}(t+2)=2g+\frac{g}{2}(t-2).$$

不论正数 $\varepsilon$ 多么小，只要 $|t-2|<2\varepsilon/g$，那么便能使得

$$|\bar{v}(t)-2g|<\varepsilon.$$

这说明，当 $t$ 逼近于 2 时，$\bar{v}(t)$ 逼近于 $2g$.

这是一个有代表性的问题．它的全盘讨论是在 $t\neq 2$ 的假定下进行的．如果不注意这一点，就会发生错误．所以凡在讨论这种问题时，总是禁止自变量取它所逼近的极限值．

**定义 1** $f(x)$ 是 $x$ 的函数，$a$ 与 $A$ 是常数．如果不论指定怎样小的正数 $\varepsilon$，总能找到一个正数 $\delta$，保证 $f(x)$ 能在条

件 $0<|x-a|<\delta$ 之下，满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

便说 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时逼近 $A$，同时 $A$ 就叫做 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限．记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \quad (x\to a).$$

特别，当 $A=0$ 时，就说 $f(x)$ 在 $a$ 点上是无穷小．

用几何的语言来说，就是：不论 $A$ 的 $\varepsilon$ 邻域多么小，总有 $a$ 点的一个空心 $\delta$ 邻域 $\mathfrak{N}(a, \delta)$，使得

$$x\in\mathfrak{N}(a, \delta)\Rightarrow f(x)\in N(A, \varepsilon).$$

图 3-1 是这种解释的具体形象．注意 $y=f(x)$ 的曲线在区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 上的一段（在 $a$ 点无定义），夹在 $y=A\pm\varepsilon$ 两直线之间，而且不能与矩形 $PQRS$ 的上下两边 $PQ$, $SR$ 相交．

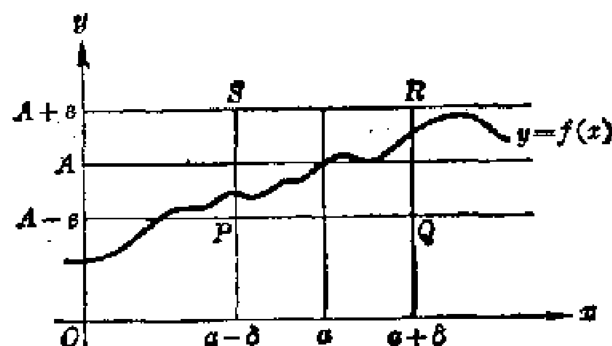



图 3-1

习惯上把定义 1 叫做 $\varepsilon-\delta$ 定义．它和 $\varepsilon-N$ 定义有许多相似之处．要分辨清楚其中的因果关系，主要的话是：

$$0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

但是为了表示"要 $|f(x)-A|$ 多小就能有多小"，不得不先说 $\varepsilon$（$|f(x)-A|$ 将要小到的程度），然后说准能找到 $\delta$．

严格地说，在定义 1 里还应该明确 $a$ 是 $x$ 的极限，$f(x)$ 必须在 $a$ 的空心邻域（适当大）里有定义．

分析学与初等数学的根本不同点，在于变量与常量的对立．分析学里几乎处处说的是变量．初学的人往往因为不注意这一点而不能很好地理解它．定义1里说 $\varepsilon$ 可以任意小，就说明 $\varepsilon$ 是变数，可以把它看作无穷小．$\delta$ 随着 $\varepsilon$ 而变化，一般也可以理解为无穷小．因此，$A$ 的 $\varepsilon$ 邻域和 $a$ 的 $\delta$ 邻域都是长度逼近于零的区间．通常说这是无穷小邻域．用这名词来解释定义1就是：当 $x$ 在 $a$ 的无穷小空心邻域内时，$f(x)$ 的值在 $A$ 的无穷小邻域内．这样，就是说图3-1里的长方形 $PQRS$ 是变的．其中又暗含着这样的意义：$\delta$ 越小，$\varepsilon$ 就越小；要 $|f(x)-A|$ 变小，就先要 $|x-a|$ 变小．

由于这样，这里和前章§2.3一样，要对应于无穷多个 $\varepsilon$ 的值各有一个 $\delta$，才符合定义的要求．使用这定义时，必须从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，找一个包含着 $\varepsilon$ 的公式*) 表示 $\delta$．

前面所讨论的瞬时速度，实际是证明

$$\lim_{t\to 2}\bar{v}(t)=\lim_{t\to 2}\frac{g(t^2-4)}{2(t-2)}=2g.$$

从这实例可以理解定义1为什么要用 $a$ 点的空心邻域．为了说明空心邻域的重要性，再举一个例题．

【例1】 假设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

那么不论正数 $\varepsilon$ 多么小，只要 $0<|x-0|<\sqrt{\varepsilon}$（这里 $\sqrt{\varepsilon}$ 就是定义1里所说的 $\delta$），便一定 $|f(x)-0|<\varepsilon$．所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

这函数本来在 $x=0$ 时有定义，即是 $f(0)=1$，撇开函数

*) 这里和第二章§2.3所加的脚注一样，一般未必有一个公式，目前的说法，只是为了初学的方便．

的这个值，求得 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是0，但是它不等于 $f(0)$. 假若定义1里不要求 $0<|x-a|$，即是允许 $x=a$ 的话，那么现在这问题中的 $|f(x)-0|$ 便不能随着 $x\to 0$ 而趋于0. 不论 $\delta$ 多么小，$|f(x)-0|$ 总还有一个值等于1. 这就不是 $f(x)$ 在这邻域内的一切值满足 $|f(x)-0|<\varepsilon$，因而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. 反而使我们不能从极限的观点了解 $f(x)$ 在 $x=0$ 的近旁的情形了. 可见定义1用 $a$ 点的空心邻域

$$0<|x-a|<\delta,$$

还有把 $f(a)$ 撇开的作用. 这样才可以分辨 $f(x)$ 是否逼近某个数.

【例2】 假设 $f(x)=x^2$，试证

$$\lim_{x\to 3} f(x)=9. \qquad (1.2)$$

【证】 令 $\varepsilon$ 是任意小的正数. 为了证明(1.2)成立，必须能够找到一个正数 $\delta$，保证 $x^2$ 在条件

$$0<|x-3|<\delta \qquad (1.3)$$

下满足 $|x^2-9|<\varepsilon$. 现在进行试探：

$$|x^2-9|=|x+3|\,|x-3|. \qquad (1.4)$$

因为 $x\to 3$，不妨认为 $|x-3|<1$，那么 $2<x<4$，于是 $|x+3|=x+3<7$. 希望 $|x^2-9|<\varepsilon$，根据(1.4)，只要 $7|x-3|<\varepsilon$ 就行了. 也就是说在 $|x-3|<1$ 的条件下，

$$|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}\Rightarrow|x^2-9|<\varepsilon.$$

所以(1.3)里的 $\delta$ 应该是1与 $\frac{\varepsilon}{7}$ 中之小者. 由此知道

$$0<|x-3|<\delta=\min\left(1,\ \frac{\varepsilon}{7}\right)\Rightarrow|x^2-9|<\varepsilon.$$

于是(1.2)被证明了.

为了加深对于 $\varepsilon-\delta$ 定义的理解，借这例题说明一下：为什么要找到 $\delta=\min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$ 这样一个公式，才可以达到"要 $|x^2-9|$ 多小就能使它多小"的目的．我们看，比如：

| 要想 $\|x^2-9\|$ 小于 | 0.1 | 0.02 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|
| 只需 $0<\|x-3\|$ 小于 | 0.1/7 =0.0143 | 0.02/7 =0.0028 | 0.001/7 =0.0001 | 0.0005/7 =0.00007 |

若没有公式 $\delta=\frac{\varepsilon}{7}$，就不是对于任何 $\varepsilon$ 求得 $\delta$．

【例 3】 试证

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{3+x}=-\frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

【证】 $\frac{2x+1}{3+x}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2x+1}{3+x}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{x+1}{3+x}.$

现在希望对于任意正数 $\varepsilon$，能找到一个正数 $\delta$，使得

$$x\in\mathfrak{N}(-1,\ \delta)\Rightarrow\frac{5}{2}\left|\frac{x+1}{3+x}\right|<\varepsilon. \tag{1.6}$$

不妨认为 $|x+1|<1$，则 $-1<x+1<1$，于是 $1<x+3<3$．从而 $\frac{5}{2}\left|\frac{x+1}{3+x}\right|<\frac{5}{2}|x+1|$．由此知道：当 $|x+1|<\frac{2}{5}\varepsilon$ 时，$\frac{5}{2}\left|\frac{x+1}{3+x}\right|<\varepsilon$．

可见取 $\delta=\min\left(1, \frac{2}{5}\varepsilon\right)$ 就能得到(1.6)．从而就证明了(1.5)．

## 习 题 一

1．当 $x\to1$ 时，$y=4x+2\to6$．问 $\delta$ 大约等于什么数时，不等式 $|x-1|<\delta$ 才能保证 $|y-6|<0.004$？

2. 验证当 $x\to 3$ 时，函数 $y=\frac{x-3}{x}\to 0$，问 $x$ 满足什么条件时才能使 $|y|<\frac{1}{1000}$？

3. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$．问 $\delta$ 大约等于什么数时，不等式 $|x-2|<\delta$ 才能使 $|y-4|<0.001$？
[提示：因为 $x\to 2$，不妨认为 $1<x<3$．]

4. 设 $a$、$c$ 是给定的实数，已知函数 $f(x)=c$．证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$．

5. 当 $x\to 2$ 时，$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}\to\frac{3}{5}$．问 $\delta$ 大约是什么数时，不等式 $|x-2|<\delta$ 就能使得 $\left|y-\frac{3}{5}\right|<0.1$？

6. 当 $x\to 3$ 时，$y=\frac{x-1}{2(x+1)}\to\frac{1}{4}$．问 $\delta$ 大约等于什么数时，不等式 $|x-3|<\delta$ 能使 $\left|\frac{1}{4}-y\right|<0.01$？

7. 试证 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$．问 $x$ 满足什么条件时，能使 $|1-\sin x|<0.01$？

8. 用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=4$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$；

(7) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}x^2=2$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$；

(11) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$．

9. 制造体积为 1000 立方厘米的正方体，要求体积误差不超过 1 立方厘米．问棱长的误差应小于什么数？

## 1.3 单侧极限

定义 1 对于 $f(x)$ 所说的极限必须从 $a$ 点的左右两侧看

$f(x)$的变化，这种情况有时不需要，有时也办不到．例如：$a$是区间$[a, b]$的左端，而$f(x)$在$a$之左没有定义时，便不能考虑$f(x)$在$a$之左的变化．这时只能在$a$点的右半邻域里讨论$f(x)$的极限．假若把定义1里$x$的取值范围

$$0<|x-a|<\delta \quad 换作 \quad 0<x-a<\delta,$$

便是单从$a$的右半邻域里看$f(x)$的变化．这样所得的极限叫做$f(x)$在$a$点的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a+).$$

同理，若将$0<|x-a|<\delta$换作$0<a-x<\delta$，便是**左极限**，记作

$$\lim_{x\to a-} f(x)=f(a-).$$

这两种极限，合称为**单侧极限**．

显然，若$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，必然$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$都存在而且相等．左、右极限有一个不存在，必然$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在．若左、右极限都存在，但是不相等，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$还是不存在．惟当左、右极限都存在且相等时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$才存在．于是有下述定理：

**定理1** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，必然且只需$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$.

【例1】 函数$f(x)=\dfrac{1}{1+a^{1/x}}\ (a>0)$，当$0<x<+\infty$时，

$$0<f(x)<\frac{1}{2};$$

当$-\infty<x<0$时，$\dfrac{1}{2}<f(x)<1$；当$x=0$时，没有意义．如果要了解这函数的图象在原点附近究竟是什么情形，需要讨论它在原点的左、右极限．

先粗略地分析一下：当 $x$ 是很小的正数时，则 $e^{1/x}$ 是很大的正数，于是 $\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 是近于 0 的正数，由此可以推测

$$f(0+)=0.$$

用同样方法可以推测

$$f(0-)=1.$$

下面证明这两个推测.

证明第一个推测时，因为 $f(x)$ 在原点之右永远大于 0（我们推测的极限），可以取 $f(x)-A<\varepsilon$ 代替

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$f(0+)$ 能否等于 0，在于有无一个 $\delta>0$，使得下列的因果关系成立：

$$0<x-0<\delta \Rightarrow f(x)-0=\frac{1}{1+e^{1/x}}<\varepsilon, \qquad (1.7)$$

但是

$$\frac{1}{1+e^{1/x}}<\varepsilon \Leftrightarrow e^{1/x}>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

不妨认为 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，于是 $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}>1$，从而 $\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}>0$. 于是

$$\frac{1}{x}>\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow x<\left(\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-1}.$$

取 $\delta=\left(\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-1}$，就能使得关系式(1.7)成立. 这就证明了

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=0.$$

在作第二个推测时，已经知道 $f(x)$ 在原点之左永远小于 1. 那么证明这第二个推测时，就可以按

$$1-\frac{1}{1+e^{1/x}}<\varepsilon \qquad (1.8)$$

来探索 $\delta$. 我们知道

$$1-\frac{1}{1+e^{1/x}}<\varepsilon \Leftrightarrow e^{1/x}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

不妨认为 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，那么 $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<1$，从而 $x\left(\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1}>0$ ($x<0$)．这时

$$\frac{1}{x}<\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \left(\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1}<x.$$

取 $\delta=-\left(\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1}$，则当 $x\in(-\delta, 0)$时，(1.8)成立.所以

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=1.$$

图 3-2 画的曲线是 $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 的图象.

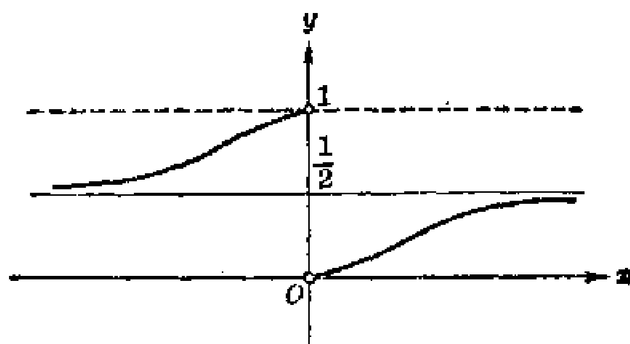



图 3-2

【例 2】 函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在原点无定义．证明它在原点的极限不存在(第一章§2.10 例 1)．

仿照第二章§2.6 推得本章§2.1 定义 1 的否定式：

> 对于某个正数 $\varepsilon_1$，如果不论正数 $\delta$ 多么小，在 $a$ 点的空心 $\delta$ 邻域里，总还有 $x$ 的值使得 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_1$，那么 $f(x)$ 便不能以 $A$ 为极限.

现在我们就按这准则来证明任何实数不能是 $\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

显然，只要证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$的一个单侧极限不存在就够了．现在证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ 不存在．从直观上看，$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$，

$$\{x'_n\}=\left\{\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\},\quad \{x''_n\}=\left\{\frac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}$$

都是无穷小．而 $\sin\frac{1}{x_n}=0$, $\sin\frac{1}{x'_n}=1$, $\sin\frac{1}{x''_n}=-1$. 这表示 $\sin\frac{1}{x}$ 的值在原点附近无休止地摆动，不能趋于稳定，应该没有极限．下边按 $\varepsilon-\delta$ 定义正式证明．

【证】 任意取一个实数 $A$，证明它不是 $\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限．

$$\left|\sin\frac{1}{x'_n}-A\right|+\left|\sin\frac{1}{x''_n}-A\right|\geqslant$$

$$\left|\left(\sin\frac{1}{x'_n}-A\right)-\left(\sin\frac{1}{x''_n}-A\right)\right|=\left|\sin\frac{1}{x'_n}-\sin\frac{1}{x''_n}\right|=2,$$

所以 $\left|\sin\frac{1}{x'_n}-A\right|$ 与 $\left|\sin\frac{1}{x''_n}-A\right|$ 两数之中至少有一个不小于 1．不论正数 $\delta$ 多么小，总还有足够大的 $n$，使得 $0<x'_n<x''_n<\delta$，那么在原点的任意小邻域里，总还有 $x$ 的值，使得

$$\left|\sin\frac{1}{x}-A\right|\geqslant 1.$$

因此 $A$ 不是 $\sin\frac{1}{x}$ 的极限．由于 $A$ 是任意的，所以任何实数都不能是 $\sin\frac{1}{x}$ 的极限．也就是说 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ 不存在． 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在．

例 1 里左右极限都存在，但是不相等．例 2 里两个单侧极限都不存在．这两题的共同点是函数在自变量的极限上都无定义．如果 $f(a)$ 有定义，可能 $f(a-)$，$f(a+)$，$f(a)$ 三者各不

相等;可能有两个相等而与第三个不相等;也可能三个都相等.

【例 3】 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\leqslant 1;\\ 2x+2, & x>1,\end{cases}$$

很容易证明 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=f(1)$ (图 3-3).

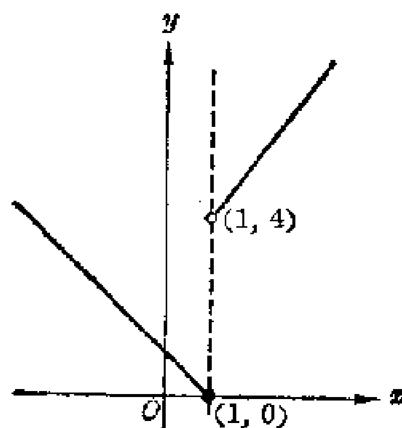


图 3-3

假若把函数改作

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1;\\ 3\quad, & x=1;\\ 2x+2\,, & x>1.\end{cases}$$

在 $x=1$ 的左、右极限都和方才一样,但是都不等于 $f(1)=3$.

用 $\varepsilon$-$\delta$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 有时很困难, 甚至不得不根据定理 1 用单侧极限去证明.

【例 4】 $a$ 为正数,试证 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$(第一章§3.3图1-38).

【证】 先讨论 $a>1$ 的情形,用单侧极限证明.

$x>0$ 时, $a^x>1$. 我们希望知道 $x$ 小到什么程度才能使

$$a^x-1<\varepsilon \quad 或 \quad a^x<1+\varepsilon$$

成立. 由于

$$a^x<1+\varepsilon \Leftrightarrow x\ln a<\ln(1+\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a} \quad (\ln a>0)\ .$$

可见 $x\in\left(0,\ \dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}\right)$ 时, $a^x-1<\varepsilon$. $\delta_1=\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$ 合于右侧极限定义的要求. 这就在 $a>1$ 的条件下证明了

$$\lim_{x\to 0^+}a^x=1.$$

$x<0$ 时, $a^x<1$. 我们希望知道 $|x|$ 小到什么程度时能保

证 $1-a^x<\varepsilon$ 成立？由于

$$0<1-a^x<\varepsilon \Leftrightarrow a^x>1-\varepsilon \Leftrightarrow x\ln a>\ln(1-\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}<x.$$

$\varepsilon<1$ 时，$\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}<0$. 当 $x\in\left(\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a},0\right)$ 时，$1-a^x<\varepsilon$. $\delta_2=-\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}$ 合于左侧极限定义的要求. 这又在 $a>1$ 的条件下证明了 $\lim\limits_{x\to 0^-}a^x=1$.

不难证明 $-\ln(1-\varepsilon)>\ln(1+\varepsilon)>0$, 取 $\delta=\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$ 就可以实现

$$0<|x-0|<\delta\Rightarrow|a^x-1|<\varepsilon.$$

这就证明了 $a>1$ 时，

$$\lim_{x\to 0}a^x=1. \tag{1.9}$$

$0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$, $a^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$. 令 $x=-t$, 则

$$\lim_{x\to 0}a^x=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^t=1,$$

因此(1.9)又在 $0<a<1$ 时成立.

$a=1$ 时，不论 $x$ 是什么实数，$a^x=1$, 自然(1.9)也成立. 证完. ]

## 习 题 二

**1**. 假设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1}, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x, & 0<x<1;\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的左、右极限．并说明这两点上的极限是否存在．

2. 求 $f(x)=\frac{x}{x}$ 及 $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在．

## 1.4 无穷远点上的极限

对比着 $n\to\infty$ 的概念，可以理解 $x\to\infty$ 的意义．详细地说，如果 $x$ 单调上升地经过一切正数，就是 $x\to+\infty$；单调下降地经过一切负数，就是 $x\to-\infty$．$|x|$ 无限增大时，就是 $x\to\infty$．

$x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 值的变化也可以渐趋稳定．这情形与数列相仿，只是在数列中 $x$ 仅仅取遍自然数，而现在要经过一切实数．

**定义 2** 假设有 $x$ 的函数 $f(x)$，$A$ 是常数．如果不论指定了怎样小的正数 $\varepsilon$，总能找到一个正数 $X$，保证 $f(x)$ 能在条件 $|x|>X$ 之下，满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

便说 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时逼近于 $A$，而 $A$ 就叫做 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限．记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

若是用邻域来叙述这定义就是：如果无论 $N(A,\ \varepsilon)$ 多么小，总有无穷远点的邻域（第二章 § 2.7）$N(\infty,\ X)$ 保证 $f(x)$ 在 $N(\infty,\ X)$ 上的值都在 $N(A,\ \varepsilon)$ 内，便说 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$．

假若自变量 $x$ 在某个时刻以后，只取正值而无限增大，即是对于任意小的正数 $\varepsilon$，总有一个正数 $X$，保证 $f(x)$ 在条件 $x>X$ 之下，满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，便说 $x\to+\infty$ 时，

$f(x)$趋于$A$，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

相仿地，用$x<-X$代替$|x|>X$，便是$x\to-\infty$时，$f(x)$趋于$A$，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to-\infty).$$

这相当于§1.3里的单侧极限．实际上，$x>X$表示$x$在无穷远点的左邻域$N_-(\infty,\ X)$内；$x<-X$表示$x$在无穷远点的右邻域$N_+(\infty,\ X)$内．因此也可以把

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

记作$f(+\infty)$和$f(-\infty)$，把$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$记作$f(\infty)$．

图3-4是定义2的示意图，表示$y=f(x)$的曲线在原点的足够大的邻域$(-X,\ X)$之外，只能在$y=A\pm\varepsilon$两直线之间摆动，而且$X$越大，两直线之间的距离越小．

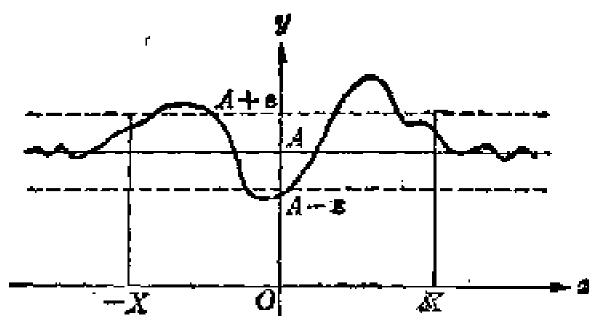


图 3-4

这里和$\varepsilon$-$N$定义或$\varepsilon$-$\delta$定义一样，$\varepsilon$是不定的数，$X$随着$\varepsilon$而变化．当用定义2证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$时，一般从不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

给$X$找一个包含着$\varepsilon$的公式，用以表示"对于任何$\varepsilon$总有合用的$X$"．

【例1】 试证$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-4}=4$．

【证】 假设$\varepsilon$是任意小的正数．现在要试探一下，是否

$|x|$ 大到某个限度 $X$ 之后，便永远

$$\left|\frac{4x^2}{x^2-4}-4\right|=\frac{16}{|x^2-4|}<\varepsilon \qquad (1.10)$$

(图 3-5)．这不等式与 $|x^2-4|>\frac{16}{\varepsilon}$ 等价．不妨说 $x>2$，

这时
$$|x^2-4|=x^2-4,$$

那么
$$x^2-4>\frac{16}{\varepsilon}$$

的话，前面的不等式必然成立．而这不等式要求

$$|x|>\sqrt{4+\frac{16}{\varepsilon}}. \qquad (1.11)$$

到此知道，$\sqrt{4+\frac{16}{\varepsilon}}$ 可以当作定义 2 里的 $X$．只要 (1.11) 成立，(1.10) 便一定成立．所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-4}=4.$$

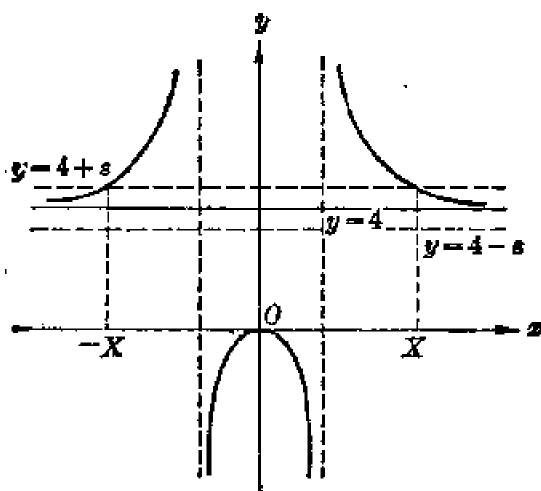



图 3-5

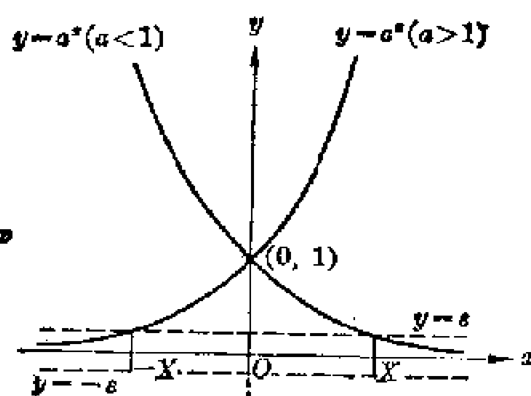



图 3-6

【例 2】 在讨论指数函数 $a^x$ 时(第一章 § 3.3) 曾经说过，当 $a>1$ 时，曲线在左方无穷远逼近 $x$ 轴，那就是说

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=0; \qquad (1.12)$$

同样地，当 $0<a<1$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0. \tag{1.13}$$

现在正式证明这两个关系：

假设 $0<\varepsilon<1$，因而 $\ln\varepsilon<0$. 不论正数 $a$ 大于或小于 1 $(a\neq1)$，不等式

$$0<a^x<\varepsilon \tag{1.14}$$

与

$$x\ln a<\ln\varepsilon<0 \tag{1.15}$$

一定互为因果.

若 $a>1$，则 $\ln a>0$，从 (1.15) 知道：$x<\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}<0$ 时 (1.14)成立. 负数 $\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ 就是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 定义中的 $-X$，这就证明了(1.12)(如图 3-6).

若 $0<a<1$，则 $\ln a<0$，从(1.15)知道：$x>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}>0$ 时，(1.14)成立. 正数 $\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ 就是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$定义中的 $X$. 这就证明了(1.13).

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 时，便说 $f(x)$ 在无穷远点上是无穷小.

关于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$等于有限数 $A$ 的最常见的情形有三种，依照 $x$ 的走向看动点时，$f(x)$或者永远大于 $A$，单调下降地逼近 $A$；或者永远小于 $A$，单调上升地逼近 $A$. 关于上下摆动而趋于 $A$ 的情况有如下例：

【例 3】 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$(图 3-7)，由于$|\sin x|\leqslant1$，一定 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$. 只要$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，便有$|f(x)|<\varepsilon$. 因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

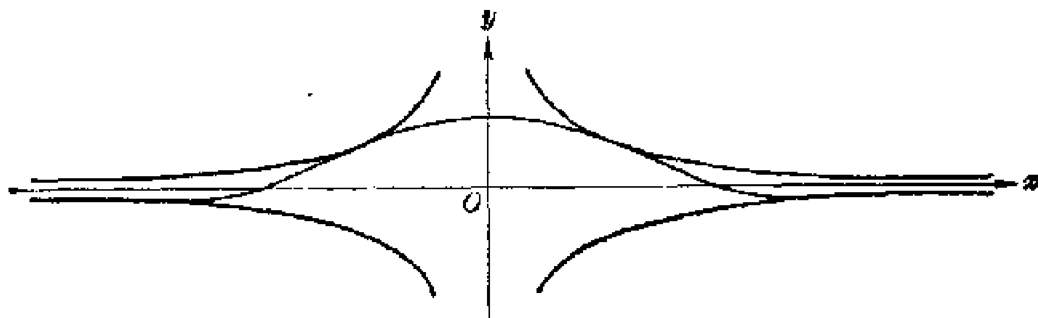



图 3-7

## 1.5 数列极限与函数极限的关系

在§1.1中我们对瞬时速度提出过一个带有根本性的疑问：是否 $t$ 沿着任何逼近于2的数列变化时，平均速度列都以 $2g$ 为极限？现在回答这个问题：

**定理2** $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ 的必然且充分的条件是：任何收敛于 $c$ 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq c)$，都使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $A$.

这里 $c$ 可以是有限数 $a$，也可以是无穷大.

【证】 第一，证必然性：假设 $\{x_n\}$ 收敛于 $c$，我们来从

$$\lim_{x\to c} f(x)=A \quad \text{证明} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

由于 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，那么对于任意的正数 $\varepsilon$，总可以找到一个 $\delta>0$，保证 $f(x)$ 在 $\mathfrak{N}(c,\delta)$ 内的值都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$，那么对于方才找到的 $\delta$，一定能找到一个自然数 $N$，保证 $x_{N+1}$，$x_{N+2}$，…都在 $\mathfrak{N}(c,\delta)$ 内，所以

$$|f(x_{N+k})-A|<\varepsilon \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

第二，证充分性．即是假设一切收敛于 $c$ 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq c)$ 都使得 $f(x_n)\to A$，求证 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$．用反证法．这

就是说，假若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq A$，就会发生矛盾.

假若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq A$，那么照 § 1.3 例 2 里说的那样，至少对于某一个正数 $\varepsilon_1$，不论 $\delta$（正数）多么小，在 $\mathfrak{N}(c,\ \delta)$ 里总还有 $\bar{x}$，使得

$$|f(\bar{x})-A|\geqslant\varepsilon_1. \tag{1.16}$$

现在令 $\delta$ 按次序取数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 各项的值，得到 $c$ 的空心邻域序列 $\left\{\mathfrak{N}\left(c,\ \frac{1}{n}\right)\right\}$，在每个邻域里总有使 (1.16) 成立的 $\bar{x}$.

在 $\mathfrak{N}(c,\ 1)$ 里取一个 $\bar{x}$，作为 $\bar{x}_1$，$|f(\bar{x}_1)-A|\geqslant\varepsilon_1$；

在 $\mathfrak{N}\left(c,\ \frac{1}{2}\right)$ 里取一个 $\bar{x}$，作为 $\bar{x}_2$，$|f(\bar{x}_2)-A|\geqslant\varepsilon_1$；

在 $\mathfrak{N}\left(c,\ \frac{1}{3}\right)$ 里取一个 $\bar{x}$，作为 $\bar{x}_3$，$|f(\bar{x}_3)-A|\geqslant\varepsilon_1$；

………………

显然数列 $\{\bar{x}_n\}$ 收敛于 $c$，然而 $|f(\bar{x}_n)-A|\geqslant\varepsilon_1$，即是

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n)\neq A.$$

这和假设矛盾．所以当一切收敛于 $c$ 的数列 $\{x_n\}$ 都使得 $f(x_n)\to A$ 时，$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 不能不等于 $A$. ▌

**推论** 如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{\bar{x}_n\}$ 都收敛于 $c$，而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n),$$

那么 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 不存在.

根据这推论证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，就容易多了，读者自证.

函数在一点 $c$ 满足定义 1 或定义 2 的要求时，这函数的动态在 $c$ 点附近必然渐趋稳定．这类函数与以前讲的收敛数

列相当，在数学分析里最为有用，因此定义 1 与定义 2 的用处也较多，必须透彻地理解它们.

关于这两种有极限的函数，也有与第二章 §2.5 定理 1、定理 2 相当的定理，就是

**定理 3** $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，必然且只需 $f(x)-A$ 在 $c$ 点是无穷小.

**定理 4** 假若 $k$ 是常数，$f(x)$ 在 $c$ 点是无穷小，那么 $kf(x)$ 在 $c$ 点也是无穷小.

## 习 题 三

1. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{1+x^2}\to 0$. 问 $N$ 为何值时，不等式 $|x|>N$ 才能使 $y<\varepsilon$?

2. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\to 1$. 问 $N$ 为何值时，不等式 $|x|>N$ 才能使 $|y-1|<\varepsilon$?

3. 用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$.

## 1.6 有限点上的无穷大

有的函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时，$|f(x)|$ 的值无限止地变大.

**定义 3** $a$ 是常数，如果对于任意大的正数 $M$，总有一个正数 $\delta$，保证 $f(x)$ 在条件 $0<|x-a|<\delta$ 之下，满足不等式

$$|f(x)|>M, \tag{1.17}$$

便说 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时趋于无穷大，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty \quad (x\to a).$$

假若将(1.17)换作$f(x)>M$，便说$f(x)$在$x\to a$时趋于正无穷大，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad 或 \quad f(x)\to+\infty \quad (x\to a).$$

假若将(1.17)换作$f(x)<-M$，便说$f(x)$在$x\to a$时趋于负无穷大，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad 或 \quad f(x)\to-\infty \quad (x\to a).$$

用邻域来叙述定义 3，便是

对于无穷远点的任何邻域$N(\infty, M)$，总有$a$点的空心邻域$\mathfrak{N}(a, \delta)$，当$x\in\mathfrak{N}(a, \delta)$时，$f(x)\in N(\infty, M)$，便说当$x\to a$时，$f(x)$趋于无穷大.

只需将$N(\infty, M)$换作$N_-(\infty, M)$或$N_+(\infty, M)$，便是$f(x)\to+\infty$或$f(x)\to-\infty$的定义.

【例 1】 $f(x)=\frac{1}{x-3}$. 任意指定一个正数$M$，总有一个正数$\frac{1}{M}(=\delta)$，只要$0<|x-3|<\frac{1}{M}$，$f(x)$便满足不等式

$$|f(x)|=\frac{1}{|x-3|}>1\Big/\frac{1}{M}=M.$$

所以$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$(图 3-8).

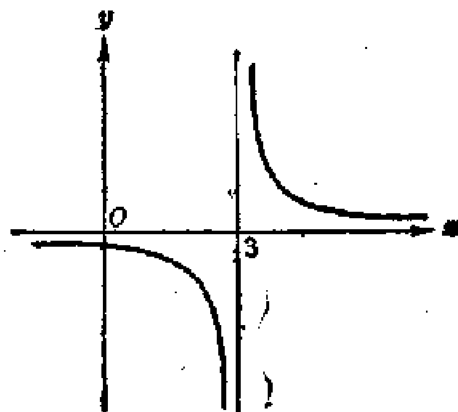


图 3-8

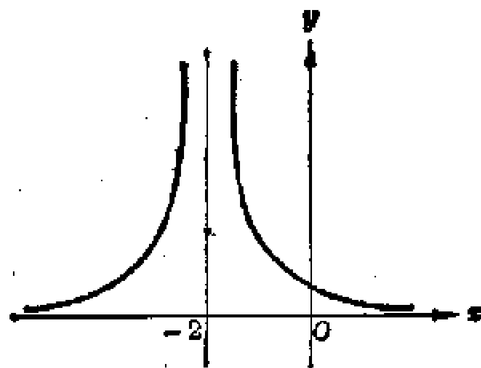


图 3-9

【例 2】 $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$. 任意指定一个正数 $M$, 总有一个正数 $\frac{1}{\sqrt{M}}(=\delta)$, 只要 $0<|x-(-2)|<\frac{1}{\sqrt{M}}$, $f(x)$ 使满足不等式

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}>1\Big/\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2=M,$$

所以 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=+\infty$(图 3-9).

【例 3】 试证 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

【证】 假设 $M$ 是任意大的正数, 我们希望知道 $x\ (>0)$ 小于什么正数 $\delta$ 时, $\ln x<-M$, 也就是

$$x<e^{-M}.$$

令 $\delta=e^{-M}$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\ln x<-M$. 问题得证.

【例 4】 试证 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2-4}$, 当 $x\to\mp2$ 时趋于无穷(§1.4 例 1, 图 3-5).

解: $\left|\frac{4x^2}{x^2-4}\right|=\left|\frac{16}{x^2-4}+4\right|\geqslant\frac{16}{|x^2-4|}-4.$

$$\frac{16}{|x^2-4|}-4>M\Leftrightarrow|x^2-4|<\frac{16}{M+4}$$

$$\Leftrightarrow|x\pm2|<\frac{16}{|x\mp2|(M+4)}.$$

当 $x\to-2$ 时, 可以认为 $-3<x<-1$, 于是 $|x-2|<5$; 当 $x\to2$ 时, 可以认为 $1<x<3$, 于是 $|x+2|<5$. 这样又推得

$$\frac{16}{|x\mp2|(M+4)}>\frac{16}{5(M+4)},$$

那么

$$|x\pm2|<\frac{16}{5(M+4)}\Rightarrow|x\pm2|<\frac{16}{|x\mp2|(M+4)}.$$

可见, 取 $\delta=\frac{16}{5(M+4)}$ 便能实现

$$0<|x\pm 2|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M.$$

这即是说 $\lim\limits_{x\to\mp 2} f(x)=\infty$.

$f(x)$ 也可以在 $a$ 点的一侧趋于无穷大. 如果 $0<x-a<\delta$ 时, $f(x)$ 大于任何预先指定的正数 $M$, 就说 $f(x)$ 在 $a$ 点的右侧趋于无穷大, 记作

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty \quad \text{或} \quad f(a+)=\infty.$$

关于 $f(x)$ 在 $a$ 点的左侧趋于无穷大的情况, 和这相仿, 不再列举了.

九号机 Z

【例 5】 分析函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在原点近旁的极限.

解: 因为 $e>1$, 所以当 $x$ 是绝对值很小的负数时, $\frac{1}{x}$ 是绝对值很大的负数, $e^{\frac{1}{x}}$ 是很小的正数; 当 $x$ 是很小的正数时, $\frac{1}{x}$ 是很大的正数, $e^{\frac{1}{x}}$ 也是很大的正数. 初步估计到

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=0, \ \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty.$$

现在证明 $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}=0$.

对于任意小的正数 $\varepsilon$, 希望

$$0<e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon, \tag{1.18}$$

也就是希望

$$\frac{1}{x}<\ln \varepsilon. \tag{1.19}$$

现在 $x<0$, 不需要考虑 $\varepsilon>1$. 当 $\varepsilon<1$ 时, $\ln \varepsilon<0$. 用正数 $x/\ln \varepsilon$ 乘(1.19)的两端, 不等的方向不变, 即得

$$1/\ln \varepsilon<x<0.$$

取
$$\delta=\left|\frac{1}{\ln \varepsilon}\right|=\frac{-1}{\ln \varepsilon},$$

则当 $0<0-x<\delta$ 时, (1.18)成立. 因此 $f(0-)=0$(图 3-10).

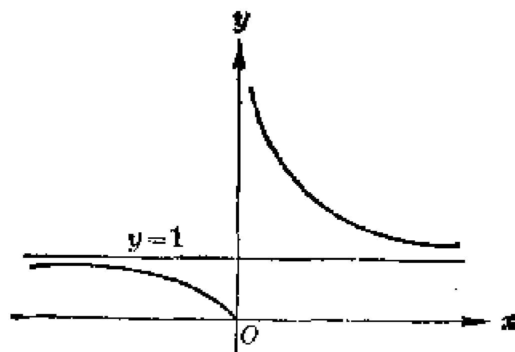


图 3-10

转来证明 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

对于任意大的正数 $M$, 希望

$$e^{\frac{1}{x}}>M, \tag{1.20}$$

也就是希望 $\dfrac{1}{x}>\ln M>0$. 用正数 $x/\ln M$ 乘这不等式的两端, 得

$$0<x<1/\ln M.$$

取 $\delta=1/\ln M$, 则当 $0<x-0<\delta$ 时, (1.20) 成立. 因此

$$f(0+)=+\infty.$$

## 1.7 无穷远点上的无穷大

**定义 4** 如果对于任意大的正数 $M$, 总有一个正数 $X$, 保证 $f(x)$ 在条件 $|x|>X$ 之下, 满足不等式

$$|f(x)|>M.$$

便说 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 趋于无穷大, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \text{或} \quad f(\infty)=\infty.$$

实际用得较多的是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty.$$

这四种情形的详细定义集中在下边的表格里.



九号机 由

对于任意大的正数 $M$，总有一个正数 $X$，

| 只　　要 | $x>X$ | $x>X$ | $x<-X$ | $x<-X$ |
|---|---|---|---|---|
| 必　　然 | $f(x)>M$ | $f(x)<-M$ | $f(x)>M$ | $f(x)<-M$ |
| 便　　说 | $f(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$ | $f(x)\to-\infty$ $(x\to+\infty)$ | $f(x)\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ | $f(x)\to-\infty$ $(x\to-\infty)$ |

例如

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}} x=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty.$$

下边的两条定理很容易证明：

**定理 5**　假若常数 $k\neq0$，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，那么

$$\lim_{x\to c}[kf(x)]=\infty.$$

这里 $c$ 可以是一个常数，也可以是 $\infty$．极限也可以是单侧的，$\infty$ 也可以换作 $+\infty$ 或 $-\infty$．

**定理 6**　假若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，那么 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$；假若 $f(x)\neq0$，而且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$，那么 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$．

例如 $x>0$，$p>0$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} x^p=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{-p}=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$$

如果在§1.6 例 5 里使用定理 6，就可以把证明工作的后一半简化如下：

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0\\ e^{\frac{1}{-x}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{-x}}=\infty.$$

又知道 $-x\to 0^- \Leftrightarrow x\to 0^+$，所以

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty.$$

虽然 $x\to c$ 时，$f(x)\to A$ 与 $f(x)\to\infty$ 的定义不同，但是两者还有共同之处，即是在 $c$ 点两近旁 $f(x)$ 的值都聚集在一点的附近．第一种情形都聚集在 $A$ 点的附近；第二种情形都聚集在无穷远点附近．在这两种情形以外，函数在一点附近的变化都比这复杂．这是下一段要讨论的问题．

## 1.8 有界函数

第一章 § 2.9 讲过有界函数的概念．那时仅是为了讨论函数图象而提出来的．处理极限问题时，往往只在一点的邻域里看函数是否有界．有界数列（第二章 § 2.9）是自然数集上的有界函数．现在着重讨论一下区间上的有界函数．

**定义 5** 假若 $M$ 是正数，而 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 上满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

便说 $f(x)$ 是 $(a, b)$ 上的有界函数．

**定义 6** 假若有一数 $B$（或 $A$），而 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 上满足 $f(x)\leqslant B$ [或 $f(x)\geqslant A$]，便说 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内于上（于下）有界，而把 $B$（或 $A$）叫做 $f(x)$ 的一个上（下）界．

既有上界又有下界的函数是有界函数．这和定义 5 是等价的（参阅第二章 § 2.9 的证明）．

**定理 7** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，而 $B<A<C$，那么一定有

一个数 $\delta>0$，保证 $f(x)$ 在 $\mathfrak{N}(c, \delta)$ 内满足不等式

$$B<f(x)<C.$$

这里 $x$ 的极限 $c$ 可以是常数或是无穷大．这里实际是说 $f(x)$ 在 $c$ 点的空心邻域里有界(参阅第二章§3.1定理1)．

【证】 令 $\varepsilon=\min(A-B, C-A)$，那么 $\varepsilon\leqslant A-B$，从而 $B\leqslant A-\varepsilon$．同理 $A+\varepsilon\leqslant C$．对应于这个 $\varepsilon$，有一个正数 $\delta$(或 $X$)，保证 $f(x)$ 在 $0<|x-c|<\delta$(或 $|x|>X$)的条件下，满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，或

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

所以 $B<f(x)<C$． ▌

推论 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，而 $A\neq 0$．那么一定有一个正数 $\delta$(或 $X$)，保证 $f(x)$ 在 $0<|x-c|<\delta$(或 $|x|>X$)的条件下满足不等式

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}.$$

这里 $c$ 的意义和上边一样．

【证】 $A>0$ 时取 $B=\dfrac{A}{2}>0$；$A<0$ 时取 $C=\dfrac{A}{2}<0$，然后引用定理7即可得证． ▌

极限存在是函数有界的充分条件，不是必然条件．例如 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，然而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

不是有界的函数，即不合乎定义5的要求的函数是无界函数．或者用定义5的否定式说：

**定义7** $M$ 是任意给定的大正数．如果在区间 $(a, b)$ 内总有 $x$ 的值使得 $|f(x)|>M$，就说 $f(x)$ 是区间 $(a, b)$ 上的无界函数．

$f(x)$ 在一点 $a$ 无界，指的是在 $a$ 点的邻域里无界，就是对

于任意大的正数 $M$，在 $a$ 点的任何(小的)邻域里，总还有 $x$ 的值使得 $|f(x)|>M$. 实际上，在 $a$ 的任何邻域里有无穷多 $x$ 的值使得 $|f(x)|>M$.

而 $f(x)$ 在 $a$ 点是无穷大，则要求 $\mathfrak{N}(a, \delta)$ 内的一切 $x$ 使得 $|f(x)|>M$. 这是无穷大与无界的区别.

【例 1】 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sin\dfrac{1}{x}}, & x\neq 0 \text{ 及 } \dfrac{1}{n\pi},\ n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots,\\[2ex] \dfrac{1}{x}, & x=\dfrac{1}{n\pi}.\end{cases}$$

在 $x=0$ 时无定义. 当 $x\to 0$ 时为无穷大 (图 3-11). 这因为不论正数 $M$ 多么大，只要 $0<|x|<\dfrac{1}{M}$，便必然

$$|f(x)|=\frac{1}{|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|}\geqslant\frac{1}{|x|}>M.$$

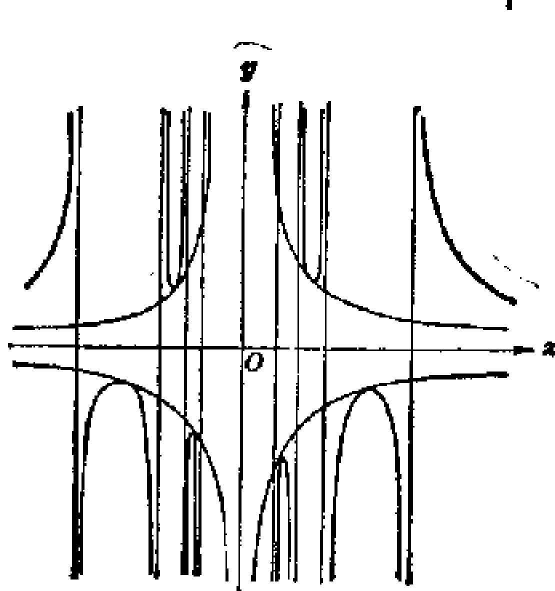


图 3-11

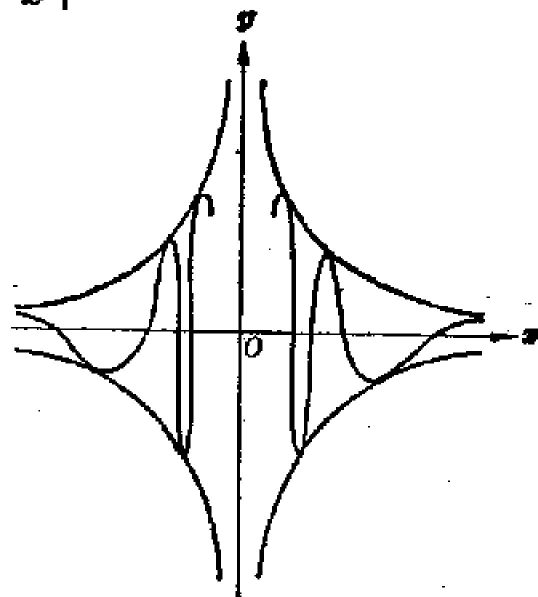


图 3-12

【例 2】 函数 $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ (图 3-12) 的绝对值在原点的任

何邻域里总能变得任意大．例如在点列$\left\{\frac{2}{(2n+1)\pi}\right\}$上函数的绝对值为$\left\{\left|\frac{(2n+1)\pi}{2}\right|\right\}$．这显然可以随着$|n|$变大而任意变大．但是在原点的任何小邻域里，总有使函数值非常接近于零的点．例如在点列$\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$上函数永远等于零．所以$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在原点不是无穷大，而是无界．

## 1.9 函数极限的存在

这里和第二章§2.10一样，只提出两个判断极限存在的定理，而不予证明．

**定理8** 若函数$f(x)$单调上升（下降）而有上界$K$（下界$L$），那么这函数必有极限，这极限不大于$K$（不小于$L$）．

**定理9** $\lim\limits_{x\to c}f(x)$存在，必然且只需对于任意指定的小正数$\varepsilon$，总有正数$\delta$，保证$f(x)$对应于$\mathfrak{N}(c,\delta)$内任意两点$x'$、$x''$的值满足不等式$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

## 习　题　四

1．假设$A$是有限数．证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分与必然的条件为对于每个趋于无穷的$\{x_n\}$，恒有$f(x_n)\to A$.

2．证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，必然且只需当$x\to\infty$时，$f(x)-A\to 0$。

3．证明:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=\infty$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0$.

4．将下列极限的定义写出来:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;　　(4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

5. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界.

6. 证明 $f(x)=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$内无界.

7. 证明 $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界,但是 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

8. 用判断极限的存在定理证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ 存在;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ 存在.

9. 设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, 而 $A>B$. 试证$|x-c|$小到一定程度之后, $f(x)>\varphi(x)$. 反过来说,假若在 $c$ 的邻域里$f(x)>\varphi(x)$, 而且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, 那么一定 $A>B$ 吗?

## 第二节　函数极限的运算

本节 2.1 与 2.2 所讲的内容几乎和第二章 § 3.2 和 § 3.3 所讲的一样. 各定理的证明也一样, 仅仅把$\{s_n\}$换作$f(x)$, $n\to\infty$ 换作 $x\to c$ 而已. 所以本节许多证明从略, 或者只是简单地提示一下.

### 2.1　函数极限的运算

关于函数的极限有两种情形: 一种是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$; 一种是 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. 下面的定理都包括这两者. 为此我们用 $x\to c$ 表示 $x\to a$ 及 $x\to\infty$; 用 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ 表示两种极限.

先叙述关于无穷小的运算定理.

**定理 1** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=0$, 那么

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm\varphi(x)]=0,\quad \lim_{x\to c} f(x)\varphi(x)=0.$$

这和第二章§3.2定理3与定理4相当. 证明方法一样.

这定理可以推广到任何有限个函数的情形,即是:

假设 $\lim\limits_{x\to c} f_i(x)=0\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 那么当 $x\to c$ 时, 这 $n$ 个函数的代数和或乘积也都以0为极限.

关于极限运算的定理有:

**定理 2** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, 那么

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B.$$

**推论** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $B$ 是常数, 那么

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm B]=A\pm B;\quad \lim_{x\to c}[B-f(x)]=B-A.$$

**定理 3** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, 那么

$$\lim_{x\to c} f(x)\varphi(x)=AB.$$

【证】 这需要证明 $f(x)\varphi(x)-AB$ 是无穷小.

$$f(x)\varphi(x)-AB=[f(x)-A]\varphi(x)+A[\varphi(x)-B],$$

由于 $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$, 那么有一个正数 $\delta$, 保证在 $\mathfrak{N}(c,\ \delta)$ 内 $|\varphi(x)|<2|B|$. 由于 $f(x)-A\to 0$, 在 $\mathfrak{N}(c,\ \delta)$ 内

$$|[f(x)-A]\varphi(x)|<2|B||f(x)-A|\to 0;$$

同理 $$|A[\varphi(x)-B]|=|A||\varphi(x)-B|\to 0.$$

根据定理1知道 $f(x)\varphi(x)-AB\to 0$. ▮

这定理可以推广到任意有限个函数的乘积.

**推论** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $B$ 是常数, 那么

$$\lim_{x\to c} Bf(x)=BA.$$

**定理 4** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x)=B$,而 $B\neq 0$,那么

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}.$$

证法与前章 § 3.3 定理 7 相同.

**定理 5** 假设 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $A>0$, $n$ 是正整数, 那么

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}.$$

【证】 认为 $f(x)>0$, $A>0$.

$$\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}=[f(x)-A]\Big/\sum_{k=1}^{n}[f(x)]^{\frac{k-1}{n}}A^{\frac{n-k}{n}}.$$

根据 § 1.8 定理 7 的推论, 当 $x$ 在某个邻域 $\mathfrak{N}(c,\ \delta)$ 内时, $f(x)>\frac{A}{2}>0$, 这时 $[f(x)]^{\frac{k-1}{n}}>\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{k-1}{n}}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[f(x)]^{\frac{k-1}{n}}A^{\frac{n-k}{n}}\\&\qquad>A^{\frac{n-1}{n}}\left(1+\frac{1}{2^{1/n}}+\frac{1}{2^{2/n}}+\cdots+\frac{1}{2^{(n-1)/n}}\right)\\&\qquad=2A^{\frac{n-1}{n}}\Big/\left(2-2^{\frac{n-1}{n}}\right).\end{aligned}$$

于是 $$|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}|<\frac{2-2^{\frac{n-1}{n}}}{2A^{\frac{n-1}{n}}}|f(x)-A|,$$

由题设 $f(x)-A\to 0$, 所以 $\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\to 0$. 】

## 2.2 有理函数的极限

下面的 $n$, $p$, $q$ 都是正整数; $c$, $a_i$, $b_j$, $x_0$ 都是常数. 列举的(1)、(2)、(3)三条容易用定理 2、3 证明; (4)、(5)、(6)三条略加解释.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. $x>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} x^{p/q} = x_0^{p/q}$.

(2) $x_0\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} cx^{-n} = cx_0^{-n}$. $x>0$ 而且 $x_0\neq 0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0} x^{-p/q} = x_0^{-p/q}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} cx^n = \infty$. $x>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} cx^{p/q} = \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} cx^{-n} = 0$. $x>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-p/q} = 0$.

(4) 设 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0\neq 0$, 那么

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$;

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \infty.$$

最末的 $\infty$ 因情况而不同，$n$ 为偶数时，它与 $a_0$ 同号；$n$ 为奇数，而 $x\to+\infty$ 时，与 $a_0$ 同号；$n$ 为奇数，而 $x\to-\infty$ 时，与 $a_0$ 反号.

(5) 设 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0\neq 0$;

$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_0\neq 0$;

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

当 $Q(x_0)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$;

当 $Q(x_0) = 0$, $P(x_0)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = \infty$.

设 $Q(x) = (x-x_0)^r Q_1(x)$; $P(x) = (x-x_0)^s P_1(x)$, $Q_1(x_0)\neq 0$, $P_1(x_0)\neq 0$, 那么

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^{s-r}P_1(x)}{Q_1(x)}$$

$$= \begin{cases} 0, & s>r, \\ P_1(x_0)/Q_1(x_0), & s=r, \\ \infty, & s<r. \end{cases}$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m}\left(\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_m}{x^m}}\right)$

$$=\begin{cases}\infty,\ n>m,\\ a_0/b_0,\ n=m,\\ 0,\ n<m.\end{cases}$$

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(3x^2+2x+1)}{(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x+1)=6$。

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)-1}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$

$=\dfrac{1}{3}$.

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=3$。

# 习 题 五

计算极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-6x+5)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-1}{3x^3-6x^2+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{7x^2-22x+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-2x+4}{x^3+x^2-10x+8}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ ($n$为整数).

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2-6x+2}{8x^3-7x^2+4x-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+x^2+3}{x^5-x^4+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8x^2+4x-1}{x^2-6x+3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

## 2.3 基本初等函数的极限

基本初等函数在其本身定义域内的每点 $x_0$，有一性质为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

本节将对基本初等函数逐个地检验一下．先证明一条预备定理：

**定理6** 假设 $f(x)$ 是区间 $(a, b)$ 上的单调函数，它的值排满了区间 $(A, B)$，$x_0$ 是 $(a, b)$ 内一点，那么

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{2.1}$$

【证】 不妨认为 $y=f(x)$ 单调上升，设 $y_0=f(x_0)$．任意

取一个小的正数 $\varepsilon$，使 $y_0-\varepsilon$ 和 $y_0+\varepsilon$ 都在 $(A, B)$ 内．因为 $(A, B)$ 内的数都是 $f(x)$ 的值，就必有 $(a, b)$ 的两点 $x'$, $x''$ 使得

$$f(x')=y_0-\varepsilon;\quad f(x'')=y_0+\varepsilon.$$

既然 $f(x)$ 单调上升，$y_0-\varepsilon<y_0<y_0+\varepsilon$，必然 $x'<x_0<x''$．不然的话，比如说 $x'\geqslant x_0$，便将要 $y_0-\varepsilon\geqslant y_0$，而这是不可能的．仍是由于单调性，必然 $f(x)$ 在 $(x', x'')$ 上的值都在 $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ 之内．

取 $\delta=\min(x_0-x', x''-x_0)$，则 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 完全包括在 $(x', x'')$ 之内，那么当

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时，必然

$$y_0-\varepsilon<f(x)<y_0+\varepsilon,$$

就是 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，所以 (2.1) 式成立． ▮

下面分别讨论各基本初等函数．

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}$.

【证】 $e^x-e^{x_0}=e^{x_0}(e^{x-x_0}-1)$.

§1.3 例 4 已经证明了 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$，那么

$$\lim_{x\to x_0}(e^{x-x_0}-1)=0,$$

由此 $\lim\limits_{x\to x_0} e^{x_0}(e^{x-x_0}-1)=0$（常数与无穷小的乘积是无穷小），从而 $e^x-e^{x_0}$ 是无穷小．

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0 \quad (x_0>0)$. (2.2)

【证】 令 $y=\ln x$，它在 $(0, +\infty)$ 内单调上升．它的值布满了区间 $(-\infty, +\infty)$，这是因为根据 $x=e^y$ 知道：每有一个 $\bar{y}$，必有一数 $\bar{x}=e^{\bar{y}}>0$，使得 $f(\bar{x})=\bar{y}$．$x_0$ 在 $(0, +\infty)$ 内，这一切具备了定理 6 的假设条件，所以 (2.2) 式成立．

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

【证】 $\sin x-\sin x_0=2\cos\dfrac{x+x_0}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}$

$$=\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}(x-x_0).$$

但是$\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\leqslant1$，用弧度作角的单位时，只要$\alpha\neq0$．永远$|\sin\alpha|<|\alpha|$，所以$\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\Big/\dfrac{x-x_0}{2}\right|<1$，于是

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\right||x-x_0|$$

$$<|x-x_0|.$$

只要$|x-x_0|<\varepsilon$，便有$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证明同上.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0,\quad x_0\neq\left(2n\pm\dfrac{1}{2}\right)\pi$.

【证】 $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}=\operatorname{tg}x_0$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x_0$.

证明同上.

关于反三角函数，我们只取主值证明.

(7) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0,\quad -1<x_0<1$. (2.3)

【证】 $\arcsin x$ 在区间$(-1, 1)$内单调上升，在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内任取一值 $\bar{y}$，必有$(-1, 1)$内的 $\bar{x}=\sin\bar{y}$ 使得相应的反正弦的值为 $\bar{y}$. 所以 $\arcsin x$ 的值布满了区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 根据定理 6 知道(2.3)式成立.

以下四条都能象(7)一样，根据定理 6 证明.

(8) $\lim\limits_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0$.

(9) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} x_0$.

(10) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} x_0$.

(11) $\lim\limits_{x\to x_0}x^r=x_0^r$，$r$ 是任何实数.

【例】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$， $a>0$.

解：$a^n$ 当 $n\to\infty$ 时的极限有两种情形：$a>1$ 时，$a^n\to\infty$；$0<a<1$ 时，$a^n\to 0$. 所以现在的问题必须分两种情形讨论：

(1) $a>1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1.$$

(2) $0<a<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{0}{1+0}=0.$$

## 习 题 六

1. 根据 §1.9 定理 7 证明 §2.3 定理 6.

[提示：$f(x_0+)$，$f(x_0-)$都存在，两者若不相等，则 $y$ 的值不能布满$(A, B)$.]

2. 用极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x_0,\quad x_0\neq\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} x_0,\quad x_0\neq\pm n\pi$.

3. 根据 § 2.3 定理 6 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0,\quad -1<x_0<1$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} x_0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} x_0$.

## 2.4 弦弧之比的极限

**定理 7** 假设在某个包含着 $x_0$ 的区间 $(a, b)$ 内,

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x), \tag{2.4}$$

又知道

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A, \tag{2.5}$$

那么

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A.$$

【证】 根据(2.5)知道,对于任意小的正数 $\varepsilon$,总有 $\delta_1$, $\delta_2$ 两个正数,保证

$$0<|x-x_0|<\delta_1 \text{ 时}, A-\varepsilon<f(x);$$

$$0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ 时}, h(x)<A+\varepsilon.$$

把这两个不等式与 (2.4) 结合起来, 则当 $0<|x-x_0|<\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$时,

$$A-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon.$$

即是

$$|g(x)-A|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A. \quad \rbrack$$

**推论** 如果在包含 $x_0$ 的区间 $(a, b)$ 内,

$$A\leqslant g(x)\leqslant h(x) \quad \text{或} \quad h(x)\leqslant g(x)\leqslant A,$$

而 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

在§2.3的(3)中曾引用不等式

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

它和 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时的 $|x|\leqslant|\operatorname{tg} x|$ 在数学分析里经常用到，因此有必要把它们正式讨论一下.

假设 $\angle AOB=x$（弧度），它的两边与单位圆交于 $A$，$B$.（图3-13），切线 $AT$ 交 $OB$ 于 $T$，$BC\perp OA$ 于 $C$，那么

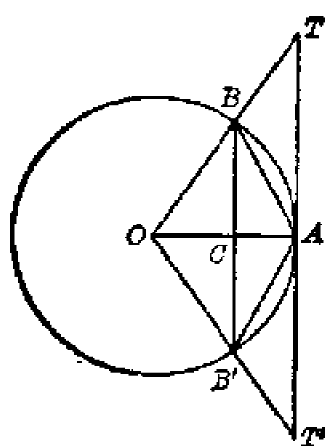


图 3-13

$\triangle OAB$ 的面积 $=\frac{1}{2}\sin x$；

扇形 $OAB$ 的面积 $=\frac{x}{2}$；

$\triangle OAT$ 的面积 $=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

显然 $\triangle OAB$ 的面积 $<$ 扇形 $OAB$ 的面积 $<\triangle OAT$ 的面积，由此，

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \qquad (2.6)$$

假若 $\angle AOB'=-x$；$B'$，$T'$ 关于 $OA$ 与 $B$，$T$ 对称，在 $\triangle OAB'$，扇形 $OAB'$，$\triangle OAT'$ 三者之间有同样的不等关系，但这时它们的面积分别是 $-\frac{1}{2}\sin x$，$-\frac{x}{2}$，$-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$，因而

$$-\frac{1}{2}\sin x<-\frac{x}{2}<-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \qquad (2.7)$$

(2.6)，(2.7)合并起来再化简，便是

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|. \qquad (2.8)$$

加入 $x=0$ 的情形，就得到

$$|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|\operatorname{tg} x|.$$

$|x|>\frac{\pi}{2}$ 时，未必 $|x|\leqslant|\operatorname{tg}x|$ 很容易证明．例如 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时，

$$\left|\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}\right|=\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right|=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=0.268<\frac{11\pi}{12}.$$

下面讨论本段的中心问题：

**定理 8** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$ (2.9)

【证】 设 $x\neq0$，用 $|\sin x|$ 除 (2.8) 式，得

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\left|\frac{1}{\cos x}\right|.$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{x}{\sin x}$，$\cos x$ 都是正数，所以

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

或者

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

但是 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos0=1$ [§ 2.3 之 (4)]．根据定理 7 的推论，便得到 (2.9)． ▌

注意：证明公式 (2.9) 时，$x$ 是用弧度度量的，以后引用这公式时，$x$ 一定要用弧度作单位．

【例 1】 试证

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=0;\tag{2.10}$$

【证】 $$\frac{\cos h-1}{h}=\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}=-\sin\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

当 $h\to0$ 时，$-\sin\frac{h}{2}\to0$[§ 2.3 之(1)]，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to1$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=0\times1=0.$$

【例 2】 **定理 9**

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1. \tag{2.11}$$

【证】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\times1=1.$ ▌

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

解：
$$\sec x-\operatorname{tg}x=\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=0.$

当 $x$ 是无穷小时，$\sin x$，$\operatorname{tg}x$，$\cos x-1$ 都是无穷小. $\dfrac{\sin x}{x}$，$\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$，$\dfrac{\cos x-1}{x}$ 都是两个无穷小之比. 按两个函数之商求极限，都将是 $\dfrac{0}{0}$，都是不定式. 但是按定理 7 来考核时，却有不同的意义. 这里暗示着无穷小虽然都趋于零，但是趋于零的“速度”不同，(2.9) 与 (2.11) 表示 $\sin x$，$\operatorname{tg}x$ 趋于

0的速度都与$x$相同；(2.10)表示$\cos h-1$趋于0比$h$快；同理，例3表示$x\to\frac{\pi}{2}$时$\cos x$趋于零的速度比$1-\sin x$慢，无穷小是可以按它们趋于零的速度来分等级的(详细讨论将在本章第五节进行)。

【例 4】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$。

解：$\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

$$=\frac{-2\sin\frac{m+n}{2}x\cdot\sin\frac{m-n}{2}x}{x^2}$$

$$=-\frac{2\sin\frac{m+n}{2}x\cdot\sin\frac{m-n}{2}x}{2\cdot\frac{m+n}{2}x\cdot 2\frac{m-n}{2}x}(m^2-n^2).$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{-1}{2}(m^2-n^2)$。

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$.

解：令$x=\pi+u$，那么$x\to\pi\Leftrightarrow u\to 0$。

所以 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin(3\pi+3u)}{\operatorname{tg}(5\pi+5u)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\sin 3u}{\operatorname{tg}5u}$

$$=-\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin 3u}{3u}\Big/\frac{\operatorname{tg}5u}{5u}\right)\cdot\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{3}{5}.$$

## 习 题 七

计算极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x+2\sin x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$.

10. $\lim\limits_{\alpha\to\beta} \dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ （$m$ 和 $n$ 是整数）.

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

## 2.5 数 $e$

在极限理论中，数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限占着很重要的地位．下面首先证明这数列收敛．令

$$
\begin{aligned}
y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} \\
&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\
&\quad+\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

相仿地,

$$y_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

$y_{n+1}$ 比 $y_n$ 多最后一项(正数),除去这一项而外,从第三项起,$y_{n+1}$ 的每项大于 $y_n$ 的对应项.因此 $y_n<y_{n+1}$.这说明 $\{y_n\}$ 单调上升.$y_n$ 的通项

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}.$$

那么,对于一切自然数 $n$,

$$y_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3.$$

这又说明 $\{y_n\}$ 于上有界.根据第二章§2.10定理6知道 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛.

**定义 1** 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限记作 $e$.

$e$ 就是自然对数的底.

**定理 10** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$ (2.13)

【证】 先证 $x\to+\infty$ 的情形. 假设

$$n\leqslant x<n+1,$$

显然 $x$ 与 $n$ 一同趋于 $+\infty$, 并且

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

进而

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (2.14)$$

但是
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

(2.14) 中左右两端当 $n\to+\infty$ 时的极限都是 $e$, 夹在中间的 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 由于 $x$ 随着 $n$ 而趋于 $+\infty$, 必定也趋于同一极限 (§2.4 的定理 7). 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

现在证明 $x\to-\infty$ 的情形: 令 $x=-y$, 则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$
$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

当 $x\to-\infty$ 时, $y-1\to+\infty$, 右端趋于 $e\cdot 1=e$. 这就证明了

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad \blacksquare$$

实用上往往把(2.13)写作 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$e$是无理数，可以照下面这样估计它的近似值：由于 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛，那么当 $n$ 很大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的展开式的尾部许多项之和一定很小．从(2.12)中去掉前面的 $k+1$ 项，取后部的 $n-k$ 项，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&\qquad\times\left[\frac{1-\frac{k}{n}}{k+1}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)\cdots n}\right]\\
&<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right]\\
&<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)}=\frac{1}{k!\cdot k}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\Big[2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots&\\
+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\Big]&\\
<\frac{1}{k!\cdot k}.&
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得

$$0<e-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)<\frac{1}{k!\cdot k}.$$

这说明用 $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}$ 作为 $e$ 的近似值，误差小于

$\frac{1}{k!k}$. 如果取 $k=10$, $\frac{1}{k!k}=0.00000002756$, 那么取

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$$

作为 $e$, 就能保证有七位小数正确，经过计算得 2.7182818.

【例 1】 求 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t$.

解: $\left(\frac{t}{1+t}\right)^t=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)^t=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$,

所以
$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e}.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解: 用 $-y$ 代 $x$, 则

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y},$$

于是
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}=\frac{1}{e}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$$=e\cdot 1=e.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right\}$$
$$=e^2\cdot 1=e^2.$$

## 习 题 八

求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^x$, $a$、$b$、$c$ 是任意常数，$b$、$c$ 同号.

## 2.6 复合函数的极限

**定理 11** 假设 $y=\varphi(x)$ 定义在包含着 $x_0$ 的区间 $I$ 内，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$; $z=f(y)$ 定义在包含着 $y_0$ 的区间 $J$ 内，而且
$$\lim_{y\to y_0}f(y)=f(y_0)=z_0,$$
那么
$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=z_0.$$

【证】 因为 $\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=z_0$, 那么对于任意小的正数 $\varepsilon$, 有正数 $\delta$, 保证 $\mathfrak{N}(y_0, \delta)$ 在 $J$ 内，而且 $f(y)$ 在 $\mathfrak{N}(y_0, \delta)$ 内满足不等式
$$|f(y)-z_0|<\varepsilon. \tag{2.15}$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$, 那么对于方才得到的 $\delta$, 有一个正数 $\eta$, 保证 $\mathfrak{N}(x_0, \eta)$ 在 $I$ 内，而且 $\varphi(x)$ 在 $\mathfrak{N}(x_0, \eta)$ 内满足

$$|\varphi(x)-y_0|<\delta. \tag{2.16}$$

把这两步连起来再倒转过来看，就是当 $x$ 在 $\mathfrak{N}(x_0, \eta)$ 内时，(2.16)成立，即 $y$ 在 $N(y_0, \delta)$ 内．既然 $y$ 在 $N(y_0, \delta)$ 内，那么(2.15)成立．总之，对于任意小的正数 $\varepsilon$，总有正数 $\eta$，保证 $f(\varphi(x))$ 在 $0<|x-x_0|<\eta$ 时，满足 $|f(\varphi(x))-z_0|<\varepsilon$．这说明

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=z_0. \tag{2.17}$$

最初已设 $z_0=f(y_0)$ 而 $y_0=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$，那么

$$z_0=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).$$

这和(2.17)连结起来就是

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)). \quad \blacksquare$$

这表示从复合函数求极限时，可以把极限运算移到内层函数上去施行．但是必须注意，要内层函数的极限 $y_0$ 存在，而且外层函数在 $y_0$ 的邻域里有定义，才可以这样变换．例如

$\lim v$ 存在时，$\lim e^v=e^{\lim v}$；

$\lim u$ 存在而且是正数时，$\lim \ln u=\ln(\lim u)$．

这里所谓函数的复合包括乘方与开方．

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x^2$．

解：$\sin x^2$ 由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 复合而成．$\lim\limits_{x\to x_0} x^2$ 存在而且等于 $x_0^2$，$\sin u$ 对于任何实数 $u$ 有意义，所以

$$\lim_{x\to x_0}\sin x^2=\sin(\lim_{x\to x_0} x^2)=\sin x_0^2.$$

【例 2】 讨论 $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$．

解：$\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ 由 $\operatorname{tg} u$ 及 $u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成．当 $x=0$ 时，$u$ 无

定义．当 $u=\frac{2k+1}{2}\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 时，即是当

$$x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$$

时，$\operatorname{tg} u$ 无意义．除去 0 和 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 以外，$\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ 对于其他任何 $x_0$ 有意义．这时候

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\operatorname{tg}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{x_0}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$．

解：$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

$$=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.$$

这里 $\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$．同时 $\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$ 是无穷小，原因是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}&=\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\\&=\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\\&=\sin 0=0.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

## 2.7 初等函数的极限

理解了前面各段的内容，就可以统一地讨论一般初等函数的极限了．第一章 § 3.10 说过，初等函数是由常数和基本

初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合而成的；那么定理 2、3、4、5 与定理 11 就概括了初等函数里运算方面(四则的、与复合函数的)的一切极限. 再结合 §2.3 关于基本初等函数的极限的讨论，就知道：

(1) 如果 $F(x)$ 是由基本初等函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 经过四则运算构成的，$x_0$ 属于 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的定义域，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ 就等于 $\varphi(x_0)$ 与 $\psi(x_0)$ 的同样四则运算的结果，只要这运算有意义.

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$，这 $\psi(x_0)$ 属于 $\varphi(x)$ 的定义域时，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(\psi(x))=\varphi(\psi(x_0))$.

由这两条就能求许多初等函数的极限.

(3) 定理 8、9、10 还可以求一些其他的极限问题.

$\operatorname{tg}\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi$、$\operatorname{ctg} n\pi$、$\sec\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)\pi$ 和 $\csc n\pi$ 本来都无意义，但是为了方便，也往往在极限的基础上，用 $\infty$ 来作为它们的值. 比如通常写作：

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty、\operatorname{ctg}(0+)=+\infty、\sec\left(\frac{\pi}{2}+\right)=-\infty \text{等等.}$$

相应地又有：

$$\operatorname{arc\,tg}\infty=\frac{\pi}{2}、\operatorname{arc\,ctg}\infty=0、\operatorname{arc\,sec}(-\infty)=\frac{\pi}{2} \text{等等.}$$

这也是极限的简写，例如 $\operatorname{arc\,tg}\infty$ 实际是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x$.

【例】 借 $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} x_0$ 证明

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arc\,ctg} x=\operatorname{arc\,ctg} x_0.$$

【证】 当 $x_0>0$ 时，可以认为 $0<x$，这时

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x},$$

由此

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,ctg} x = \lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_0} = \operatorname{arc\,ctg} x_0.$$

当 $x_0 < 0$ 时，认为 $x < 0$，这时

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}.$$

那么
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,ctg} x &= \pi + \lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \\ &= \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_0} = \operatorname{arc\,ctg} x_0. \end{aligned}$$

当 $x_0 = 0$ 时，

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arc\,ctg} x = \lim_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,ctg} 0.$$

## 第三节 连续函数

### 3.1 连续概念

微积分是施行于函数的运算．函数能不能微分或积分是一个根本问题．为了作这样的判断，必须按照这个目标将函数分类．其中重要的一类，就是连续函数．

物质世界连续变化的现象很容易列举：例如飞机在飞行过程中，它的位置的变化、它和起飞站的直线距离的变化、它在空中飞过的曲线、飞行中每个时刻以前飞过的曲线距离的变化、飞行中每个时刻方向的变化以及在每个时刻离地面的高度和地心的距离的变化等等，无一不是连续变化的．

数学分析的实用价值是用函数模拟物质世界的变化现象，那么有必要模拟连续变化的物质现象，模拟这种变化现象

的函数就是连续函数．怎样的函数是连续的呢？或许有人会认为图象是连续曲线的函数就是连续函数．然而图象仅能帮助我们理解函数，而不能作为研究函数的根据．所以还须要有数学化的确切定义才行．

连续与间断互相排斥，间断的否定就是连续．第一章§2.5例1、例2中都有间断函数，函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 间断，反映变化现象中的突变，直观的解释是 $x$ 从 $x_0$ 移动很少很少的一点，$f(x)$ 突然跳一大段．与此相反的连续现象是 $x$ 移动得很少时，$f(x)$ 也变化得很少．如果用 $x_0+\Delta x$ 表示 $x_0$ 附近的点，$\Delta x$ 代表一个很小的数（不是 $\Delta$ 与 $x$ 的乘积）或正或负，叫做 $x$ 在 $x_0$ 点的增量，再令 $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$，而称

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点对应于 $\Delta x$ 的增量．那末上面的推测无异于说：当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$．或者说自变量的无穷小增量，仅能引起函数的无穷小增量．如果联想到

$$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=f(x)-f(x_0),$$

上面的话即是

$$\text{当 } x\to x_0 \text{ 时，} f(x)\to f(x_0). \tag{3.1}$$

**定义 1** 如果函数 $f(x)$ 在某点 $x_0$ 的极限等于函数在 $x_0$ 点的值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

便说 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续，而 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的连续点．

注意：$f(x)$ 在 $x_0$ 点连续，需要三个条件：

第一、$f(x)$ 在 $x=x_0$ 时有确定的值 $f(x_0)$；

第二、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

第三、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$．

【例】 试证下列函数在 $x=0$ 时连续：

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数；} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数。} \end{cases}$$

【证】 第一、$f(0)=0$；

第二、$|f(x)|=|x|$，当 $x\to 0$ 时，$|x|\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0;$$

第三、$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续.

定义 1 是借极限概念叙述的，如果从(3.1)的意义直接用 $\varepsilon$–$\delta$ 来叙述，便是：

**定理 1** 假设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域里有定义. 它在 $x_0$ 点连续的必然且充分的条件是：对于任意小的正数 $\varepsilon$，总有正数 $\delta$，保证 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内满足不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{3.2}$$

许多书中用这定理的条件作为连续的定义. 本质上这和定义 1 是一样的. 但是和 § 1.1 函数极限的定义有一点不同. 那里并不要 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，甚至不要求 $f(x_0)$ 存在. 所以特别注意要 $x\neq x_0$. 现在只盼 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 相等，所以除去把那里的极限值 $A$ 换作 $f(x_0)$ 而外，保证(3.2)式成立的条件 $|x-x_0|<\delta$ 不再是 $x_0$ 的空心邻域了.

在 § 1.2 中对于图 3-1 所说的话，只需把 $A$ 换作 $f(x_0)$，便是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时连续的几何解释.

定义 1 可以写作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x). \tag{3.3}$$

函数是否连续，就看极限记号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 能否移入函数记号之内.

函数也可以只在一点的一侧连续．当

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$$

时，便说 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右侧连续；当

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$$

时，便说 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左侧连续．在一点的两侧都连续时，必在这点上连续．例如

$$f(x)=\sqrt{x-2}$$

时，$f(2)=0$，$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=0$．$f(x)$在2的右侧连续．又如

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0;\\ 2-e^x, & x<0. \end{cases}$$

$$f(0+)=f(0-)=1=f(0)$$

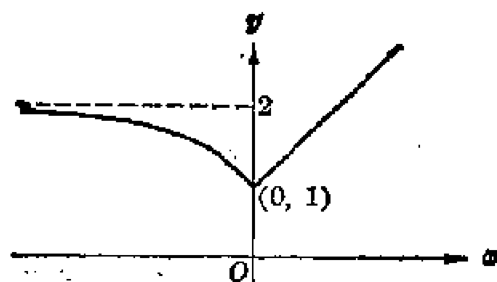



图 3-14

函数在原点连续（图3-14）．

函数在区间$[a, b]$的左端 $a$ 连续时，只能在 $a$ 的右侧连续；同理，在 $b$ 点，只能在左侧连续．

## 3.2 关于连续函数的运算

在§2.1中关于函数的极限运算，已经奠定了连续函数运算的基础，根据那里的定理1可以直接提出下面的定理：

**定理2** 假若 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都在 $x_0$ 点连续，那么它们的和、差、积

$$f(x)\pm\varphi(x),\ f(x)\varphi(x)$$

都在 $x_0$ 点连续；如果 $\varphi(x_0)\neq 0$，那么 $f(x)/\varphi(x)$ 也在 $x_0$ 点连续．

例如 $\sin x$, $\cos x$ 都在 $x=\frac{\pi}{4}$ 时连续，而且都不等于0，于是

$$\sin x \pm \cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \operatorname{ctg} x$$

都在 $x=\frac{\pi}{4}$ 时连续．当 $x=0$ 时，$\sin x=0$，尽管 $\sin x$ 与 $\cos x$ 都在 $x=0$ 时连续，但 $\operatorname{ctg} x$ 在 $x=0$ 时不连续．

在 § 2.2 中关于有理函数的极限是有理函数的连续的基础．在这方面有：

**定理 3** 既约有理分式，除去分母的零点而外，处处连续．

如果分子与分母有公因子，需要用极限理论另作处理（参阅 § 3.4 中可补间断点及其例 6）．

两个不连续的函数相加减或乘除，可以得到连续函数，例如：

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x, \\ -1, & x\leqslant 0; \end{cases} \quad \varphi(x)=\begin{cases} -1, & 0<x, \\ 1, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

那么 $f(x)+\varphi(x)=0$ 是连续函数．如果 $g(x)=x^2$，那么

$$\varphi(x)g(x)=\begin{cases} -x^2, & 0<x, \\ x^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

也是连续函数．

把 § 2.6 中关于复合函数的极限定理略加改变，便是复合函数连续性的定理：

**定理 4** 假若 $u=\varphi(x)$ 在 $x_0$ 点连续，

$$\varphi(x_0)=u_0; \quad 而 \quad y=f(u)$$

在 $u_0$ 点连续，那么复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 $x_0$ 点连续．

用极限符号来写这定理，就是

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)). \tag{3.4}$$

这是公式 (3.3) 的推广．两者都是从极限的运算描写函数的连续性，而且描写得简单扼要．函数连续的必然充分条

件是极限符号可以移到函数符号之内. 当已知函数连续时，可以根据(3.4)求它在某点的极限.

【例 1】 已知 $a^x$ 在 $x=0$ 时连续，又知道 $\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 时连续. 求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} a^{\sin t}$.

解：$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} a^{\sin t}=a^{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}}\sin t}=a^{\sin\frac{\pi}{3}}=a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

有很多较为不明显的极限往往可以用这方法去求，我们在 § 2.5 里已这样作过.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

解：令 $x=kt$, 则 $\frac{k}{x}=\frac{1}{t}$. 而且 $t$ 与 $x$ 同时趋于 $\infty$. 这时

$$\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k.$$

可见这是 $u^k$ 与 $u=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ 的复合函数. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k$$
$$=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k=e^k.$$

下面两个例题是很有用的公式.

【例 3】 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

解：从对数的性质知道：

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

右端是 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 和 $\ln u$ 的复合函数，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln e=1.$$

【例 4】 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

【证】 令 $z=a^x-1$ 则 $x\to 0\Leftrightarrow z\to 0$, 而且

$$a^x=1+z.$$

取对数, 解 $x$

$$x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a},$$

由此

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{z\ln a}{\ln(1+z)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z\ln a}{\ln(1+z)}=\ln a.$$

当 $a=e$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, 从而 $e^x\approx 1+x$.

## 习 题 九

求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$.
8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln\arcsin x$.

## 3.3 初等函数的连续性

前面讲的只是函数在一点的连续性, 现在来看函数在一个区间上的连续性.

**定义 2** 如果 $f(x)$ 的连续点组成某个区间 $(a, b)$，便说 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上连续.

例如，因为 $\sin x$ 在数轴的每点 $x_0$ 上连续，所以 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 因为 $\ln x$ 对于每个正数 $x_0$ 连续，所以 $\ln x$ 在 $(0, \infty)$ 上连续.

$\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续（当然也在 $(-\infty, 0)$ 上连续），但是不在 $[0, +\infty)$ 上连续，原因是函数在 $x=0$ 时无定义，因而在这点不连续.

§3.1 中例 1 的函数只在 $x=0$ 一点连续，不在任何区间上连续（读者考虑如何证明这函数在 $x\neq 0$ 时不连续，参看第二章 §2.6 $\varepsilon$-$\delta$ 定义的否定式）.

把 §2.3 讨论的结果与现在的定义 2 结合起来，就得到下面的定理:

**定理 5** 基本初等函数在各自的定义域上连续.

关于复合函数 $f(\varphi(x))$ 的连续区间，可以得到下面这样一个规律:

如果 $f(u)$ 的连续区间是 $I$，$u=\varphi(x)$ 的值域是 $J$，$I$ 与 $J$ 的公共部分是 $K$. 如果 $K$ 对应于 $\varphi(x)$ 的定义域中的一个区间 $L$，那么 $f(\varphi(x))$ 在 $L$ 上连续.

【例 1】 问函数 $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2+1}}$ 在什么区间上连续?

解: 先讨论这函数中的第一项. 它是由

$$\sqrt{u}, \quad u=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

组成的复合函数. $\sqrt{u}$ 的定义域是 $I$: $u\geqslant 0$, 而 $u=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

的定义域 $L$ 包括三个区间:

$L_1$: $(-\infty, -1)$, 在这里 $1<u<+\infty$;

$L_2$: $(-1, 1)$, 在这里 $-\infty<u\leqslant -1$;

$L_3$: $(1, +\infty)$, 在这里 $1<u<+\infty$。

所以 $u$ 的值域 $J$ 有两个区间:

$$J_1:\ (1, +\infty);\quad J_2:\ (-\infty, -1).$$

$I$ 与 $J$ 的公共部分 $K$ 是$(1, +\infty)$, $K$ 对应于 $L$ 中的 $L_1$ 和 $L_3$, 所以$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ 在区间$(-\infty, -1)$与$(1, +\infty)$上连续.

同样的分析, 可知$\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2+1}}$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上连续.

所给函数在$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ 与 $\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2+1}}$ 的连续区间的公共部分$(-\infty, -1)$及$(1, +\infty)$上连续.

【例 2】 按下列三种情形讨论函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的连续性: (1)$\alpha$ 是分数 $p/q$, 其中 $p$、$q$ 是正整数; (2)$\alpha$ 是负分数; (3)$\alpha$ 是任意实数 $s$.

解: (1) $y=x^{p/q}=(x^{1/q})^p$ 是由 $y=u^p$, $u=x^{1/q}$ 复合成的. $y=u^p$ 的定义域是 $I$: $(-\infty, +\infty)$, 根据第一章§3.2 的约定, $u=x^{1/q}$ 的定义域是 $L$: $[0, +\infty)$, 值域是 $J$: $[0, +\infty)$. $I$ 与 $J$ 的公共部分是 $K$: $[0, +\infty)$, $K$ 对应于 $L$(的全体). 所以 $f(x)=x^{p/q}$ 在区间$[0, +\infty)$上连续.

(2) $\alpha$ 是负有理数 $-r$ $(r>0)$ 时,

$$f(x)=x^{-r}=\frac{1}{x^r}.$$

$x^r$ 的定义域和值域都是$[0, +\infty)$(根据前面的讨论), $x^{-r}$ 仅在 $x=0$ 时无意义, 从而不连续, 所以这时 $f(x)$ 在$(0, +\infty)$上连续.

(3) $f(x)=x^{x}=e^{x\ln x}$. 这是由

$$y=e^{u},\quad u=x\ln x$$

复合成的. $y=e^{u}$ 的定义域与 $u=x\ln x$ 的值域都是 $(-\infty,+\infty)$, 所以 $u=x\ln x$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 是 $e^{x\ln x}$ 的定义域. 这说明 $x^{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

【例 3】 求 $\log\sin x$ 的连续区间,并求

$$\lim_{x\to\pi/2}\log\sin x.$$

解: 所设函数是由 $\log u$ 和 $u=\sin x$ 复合成的. $\log u$ 的定义域是 $I$: $u>0$; $u=\sin x$ 的值域是 $J$: $-1\leqslant u\leqslant 1$; $I$ 与 $J$ 的公共部分 $K$ 是 $0<u\leqslant 1$; $u=\sin x$ 的定义域

$$L:\ -\infty<x<+\infty$$

中与 $K$ 对应的部分 $(2n\pi,\ 2n\pi+\pi)$ (其中 $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$) 是 $\log\sin x$ 的连续区间.

$\frac{\pi}{2}$ 在 $\log\sin x$ 的连续区间 $(0,\ \pi)$ 之内, 所以

$$\lim_{x\to\pi/2}\log\sin x=\log\sin\frac{\pi}{2}=0.$$

## 3.4 函数的间断点

**定义 3** 函数在一点不连续时,就说它在这点上间断, 而这点叫做函数的间断点.

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 时不连续,即是

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

不成立. 它不成立的原因有三方面: 或者 $f(x_0)$ 无意义; 或者 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在; 或者两者都存在然而不相等. 只要出现这三种情况中的一种, $x_0$ 便是 $f(x)$ 的间断点. 下面观察几个例题.

【例 1】 函数 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2-4}$ (图 3-15)在 $x=\pm 2$ 时无定义. $x=\pm 2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

【例 2】 函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(见本章 § 1.3 例 1, 图 3-2.)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在, 所以 $x=0$ 是间断点.

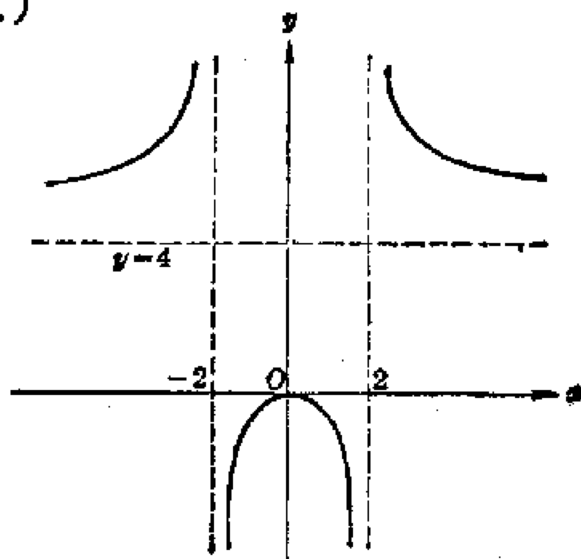


图 3-15

【例 3】 函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, 在 $x=0$ 时无定义, 所以 $x=0$ 是这函数的间断点.

【例 4】 试看函数 $f(x)=[x]$ (图 3-16). 对于每个整数 $n$, 在区间 $n\leqslant x<n+1$ 内 $f(x)=n$, 所以

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=n-1;$$

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=n.$$

可见一切整数是 $f(x)$ 的间断点.

【例 5】 函数(图 3-17)

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

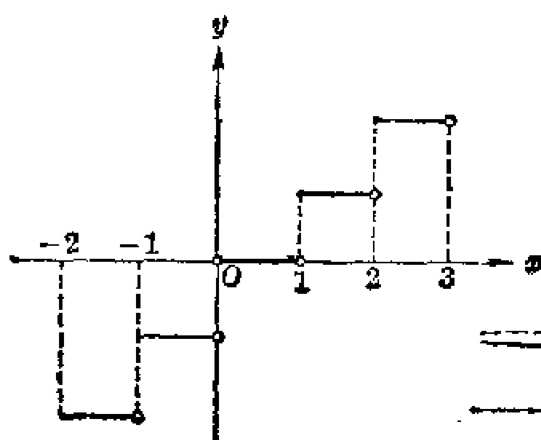



图 3-16

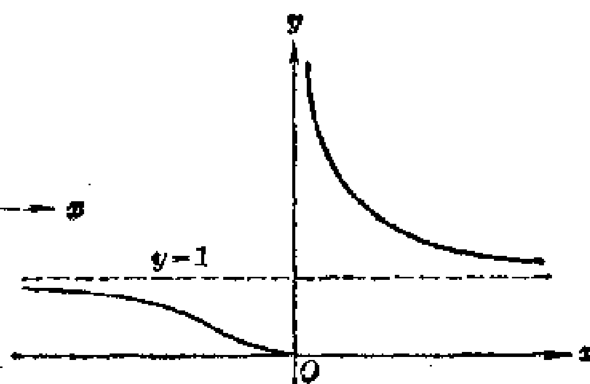



图 3-17

很容易证明:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$$

这函数在 $x=0$ 的值等于左极限，但是右极限不存在，所以 $x=0$ 是间断点.

总观以上诸例，函数在间断点上，或者有定义(例2、4、5)，或者没有定义(例 1、3)．函数在这点的左右极限，或者都不存在(例 1、3)，或者都存在(例 2、4)，或者一个存在，一个不存在(例 5).

左右极限(都存在)不相等的间断点，叫做**第一类间断点**，在这类间断点上，函数跳跃一段距离，所以这种间断点又叫做**跳跃间断点**，跳跃的距离叫做函数在这间断点上的**跃度**．其他叫做**第二类间断点**．若第二类间断点至少有一侧的极限为无穷大时，则称为**无穷间断点**.

凡当 $f(x)$ 在 $x_0$ 点无定义时，$x_0$ 应是间断点．然而 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等时，也就是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

时，若用这极限值作为$f(x_0)$的定义，那么$f(x)$便在$x_0$点连续了．这种情形，我们认为它是连续的，而称$x_0$为可补间断点(参看下例)．

【例 6】 函数$f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$在$x=3$时无定义，然而

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

因此规定$f(3)=\dfrac{1}{6}$，函数便在$x=3$时连续了(图 3-18)．

【例 7】 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$时无定义．然而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

取$f(0)=0$，则$f(x)$连续．原点是可补间断点．

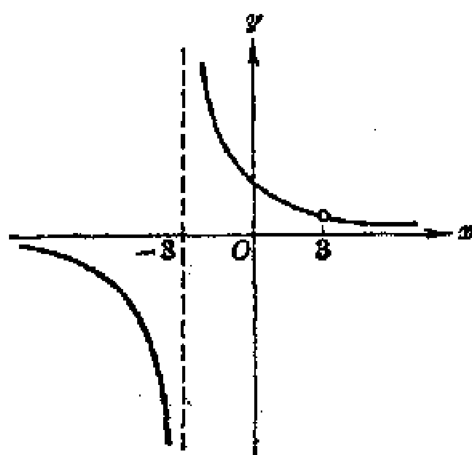


图 3-18

间断函数也有现实意义．例如：一克重的冰受热后，它的温度从$-n$°C上升到0°C时，每升高一度需要热$\dfrac{1}{2}$卡，这中间消耗的热量$Q$对于温度$t$的依赖关系是：

$$Q(t)=\frac{1}{2}t+\frac{n}{2},\quad -n\leqslant t<0.$$

0°C时的一克冰溶解为0°C时的水消耗的热量是79.7卡(溶解热)．完全溶解成水之后，每升高1°C要用1卡热．这时如果连同以前消耗的热量一起计算，那么

$$Q(t)=t+\frac{n}{2}+79.7,\quad 0<t.$$

显然 $\lim\limits_{t\to0^-}Q(t)=\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{t\to0^+}Q(t)=\frac{\pi}{2}+79.7$,

左右极限不相等,所以 $Q(t)$ 在 $t=0$ 时间断(图 3-19).

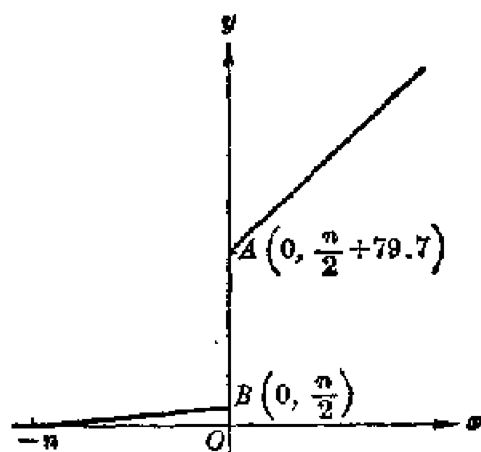


图 3-19

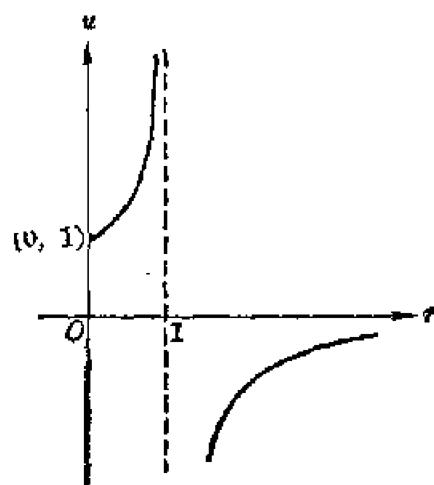


图 3-20

又如:运转的机器会使机器的支架发生振动,因而影响支架的内力,甚至使它变形. 假若机器的运转频率是 $\theta$, 支架的振动频率是 $\omega$. 令 $r=\frac{\theta}{\omega}$. 由机器振动引起的位移与动力系数 $\mu$ 有关系,而

$$\mu=\frac{1}{1-r}.$$

从这里看到: $r\to1$ 时 $\mu\to\infty$. 即是说 $\theta\to\omega$ 时,动力系数无限增大,这时就要发生共振现象,影响支架的正常使用,甚至造成破坏.

## 习 题 十

1. 讨论下列函数的连续性:

(1) $y=\frac{1}{x^2-x}$; (2) $y=\frac{x^3}{x}$;

(3) $y=\begin{cases}3x+1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant1,\\ 5-x, & 若\ 1<x\leqslant2;\end{cases}$ (4) $y=\begin{cases}x^2, & 若\ x>0,\\ \sin x, & 若\ x\leqslant0;\end{cases}$

(5) $y=\begin{cases} x+1, & 若 x\geqslant 3, \\ 4-x, & 若 x<3; \end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases} 3x, & 若 0\leqslant x<1, \\ 2x-1, & 若 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 7-2x, & 若 2<x<3; \end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 若 x\neq 0, \\ 2, & 若 x=0; \end{cases}$ (8) $f(x)=\begin{cases} 3+x^2, & 若 x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin 3x}{x}, & 若 x>0; \end{cases}$

(9) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 若 x\neq 0, \\ 0, & 若 x=0; \end{cases}$

(10) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若 x\neq 0, \\ 0, & 若 x=0; \end{cases}$ (11) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & 若 x\neq 0, \\ 0, & 若 x=0; \end{cases}$

(12) $f(x)=[x]$;

(13) $f(x)=\begin{cases} x, & 若 x 为有理数, \\ -x, & 若 x 为无理数; \end{cases}$

(14) $f(x)=\begin{cases} 1, & 若 x 为有理数, \\ 0, & 若 x 为无理数. \end{cases}$

2. 若 $f(u)$ 在 $u_0$ 连续，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，试证 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$.

又若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u)=A$，$g(x)$ 在 $x_0$ 连续，$g(x_0)=u_0$，上式是否亦成立？

3. 下列函数的间断点各属于哪一类？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; (2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 若 x\neq 0, \\ 2, & 若 x=0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & 若 x\neq 0, \\ 3, & 若 x=0; \end{cases}$ (4) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$;

(5) $f(x)=\begin{cases} 2x, & 若 x\neq 3, \\ 1, & 若 x=3; \end{cases}$ (6) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & 在 x\neq 0, \\ 0, & 在 x=0. \end{cases}$

4. 当 $x=0$ 时，下列函数 $f(x)$ 无意义，试定义 $f(0)$ 的数值，使 $f(x)$ 在

$x=0$ 连续:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

(3) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$;　　(4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

5. 试举例说明当 $x=x_0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不连续，但此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

6. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续，$g(x)$ 在 $x_0$ 间断. 问 $f(x)\cdot g(x)$ 是否在 $x_0$ 点一定间断?

7. 试证：若单调有界函数 $f(x)$ 能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

8. 试证：$f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，必然且只需对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|x'-a|<\eta$ 和 $|x''-a|<\eta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

9. $f(x)$ 在 $a$ 点有定义，在 $a$ 点有极限，在 $a$ 点连续三者有什么关系?

10. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时有定义. 如果对于 $\{\varepsilon_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 中的每个 $\varepsilon_n$ 总有 $\delta_n=\delta_n(\varepsilon_n, x_0)$ 能实现

$$|x-x_0|<\delta_n \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_n.$$

问 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时是否连续?

11. 已知 $f(x)$ 连续，试证 $|f(x)|$ 连续.

## 第四节　连续函数的性质

### 4.1 确界定理

本章 §1.8 所讲的有界函数的上界与下界，不是唯一的，不是确定的. 凡当函数 $f(x)$ 有上界时，总有一个最小的上界 $U$，这时 $U$ 适合下列条件:

(1) $f(x)$ 的一切值 $\leqslant U$;

(2) 对于任意小正数 $\varepsilon$，总能找到 $f(x)$ 的值 $>U-\varepsilon$（即是任何小于 $U$ 的数不能是 $f(x)$ 的上界）.

这样的上界 $U$ 叫做 $f(x)$ 的上确界，或最小上界．同样，$f(x)$ 的下确界或最大下界 $L$，是适合下列条件的一个数：

(1) $f(x)$ 的一切值 $\geqslant L$；

(2) 对于任意小的正数 $\varepsilon$，总能找到 $f(x)$ 的值 $< L+\varepsilon$（即是任何大于 $L$ 的数都不能是 $f(x)$ 的下界）．

例如：$\sin x$，$\cos x$ 的上确界是 1；下确界是 $-1$．

$\operatorname{arc tg} x$，$\arcsin x$（主值）的上确界是 $\frac{\pi}{2}$；下确界是 $-\frac{\pi}{2}$．

函数 $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$（§ 1.3 例 1，图 3-2）在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的上确界是 1，下确界是 0；在 $(0,\ +\infty)$ 内的上确界是 $\frac{1}{2}$，下确界是 0；在 $(-\infty,\ 0)$ 内的上确界是 1，下确界是 $\frac{1}{2}$．

可以证明，有界函数必有确界，然而确界未必是函数的值．例如：$\arcsin x$ 在 $x=\pm 1$ 时达到它的上下确界 $\pm\frac{\pi}{2}$．而 $\operatorname{arc tg} x$ 不能达到它的确界．$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不论在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内或 $(0,\ +\infty)$ 与 $(-\infty,\ 0)$ 内都不能达到确界（图 3-2）．

如果 $f(x)$ 达到它的上确界，那么这上确界便是 $f(x)$ 的最大值．$f(x)$ 能否达到它的上确界，说明函数有无最大值．例如尽管函数 $\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 有界，但却没有最大值．关于下确界与最小值之间的关系也是这样．

函数有没有最大值或最小值的问题，在理论上或实用上都很重要，都要考虑．下面所写的确界定理就是讨论这个问题的．

**定理 1** 闭区间上的连续函数必有最大值与最小值．

这里不打算给这定理作正式的证明．粗略地说，在 $[a,\ b]$

上连续的函数 $y=f(x)$ 表现为$[a,b]$上的连续曲线(图 3-21). 这条曲线上至少有一点$(c, f(c))$不低于其余一切点, 也至少有一点$(d, f(d))$不高于其余一切点. 令$f(c)=U$, $f(d)=L$, 则不论 $x$ 是$[a, b]$上的哪一点, 永远

$$L\leqslant f(x)\leqslant U.$$

这定理的假设条件有两点: 一是闭区间, 一是函数连续. 这两个条件缺一不可. 函数 $\operatorname{arc\,tg} x$ 不能达到上下确界$\pm\frac{\pi}{2}$, 是因为$(-\infty, +\infty)$是开区间. 函数 $\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 虽然在闭区间$[-1, 1]$上, 但也不能达到上确界 1 及下确界 0, 是因为函数在这区间里间断.

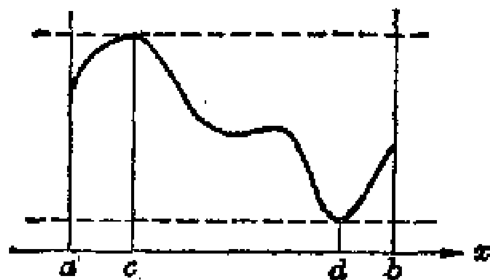



图 3-21

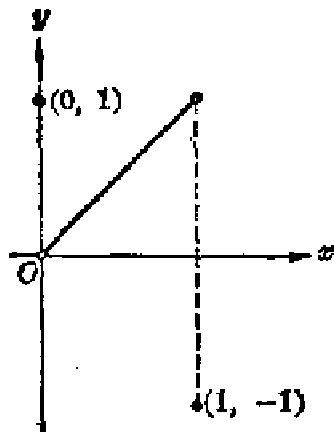



图 3-22

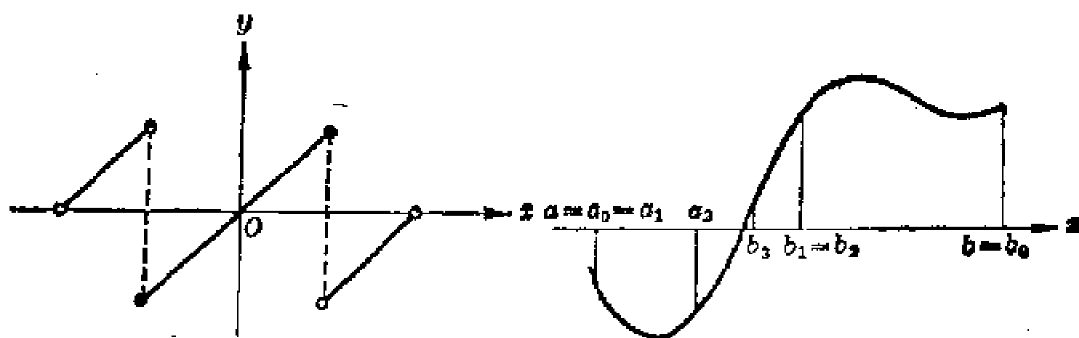
还要注意, 这定理的假设仅是充分条件, 并不是必然条件. 所以不能说开区间内的连续函数或闭区间内的间断函数, 甚至开区间内的间断函数不能达到上下确界. 例如闭区间$[0, 1]$上的间断函数(图 3-22)

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x=0; \\ x, & 0<x<1; \\ -1, & x=1. \end{cases}$$

及开区间$(-2, 2)$上的间断函数(图 3-23)

$$f(x)=\begin{cases} 2+x, & -2<x<-1; \\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1; \\ -2+x, & 1<x<2. \end{cases}$$

都有最大值 1 与最小值$-1$.



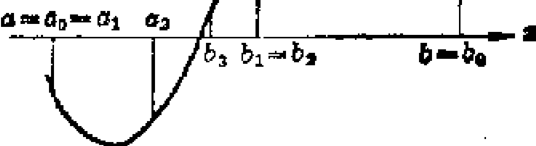


图 3-23　　　　图 3-24

## 4.2 介值定理

在初等代数解方程时，若$P(x)$是多项式，通常根据$P(x_1)$和$P(x_2)$的符号不同而断定$P(x)=0$至少有一个根在$x_1$与$x_2$之间．例如$P(0)<0$，而$P(1)>0$，便至少有一根在区间$(0, 1)$之内．$P(x)$是连续函数，$y=P(x)$的图象是连续曲线，连续曲线从$x$轴下方($P(0)<0$)达到$x$轴上方($P(1)>0$)时，必定与$x$轴相交．这交点的横坐标便是$P(x)=0$的根．

如果不限定多项式，而是任意连续函数$f(x)$，便有下面这条定理：

**定理 2**　假若$f(x)$在$[a, b]$上连续，而且$f(a)$与$f(b)$异号，那么在$(a, b)$内至少有一点$\xi$，使$f(\xi)=0$.

【证】　假设$f(a)<0$，$f(b)>0$(图 3-24)．在$[a, b]$的中点$\dfrac{a+b}{2}$上，$f(x)$可能等于零，也可能不等于零．如果

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,$$

$\frac{a+b}{2}$就是$\xi$，定理便被证明了；如果$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$，那么$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$一定和$f(a)$与$f(b)$二者之一同号．比如说与$f(b)$同号．于是令$\frac{a+b}{2}=b_1$；$a=a_1$，那么$f(x)$在$[a_1, b_1]$上又满足定理的假设条件了：即$f(x)$在$[a_1, b_1]$上连续，$f(a_1)<0$，$f(b_1)>0$．如果$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$，$\frac{a_1+b_1}{2}$就是$\xi$；如果

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0,$$

$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$又和$f(a_1)$或$f(b_1)$同号．比如说和$f(a_1)$同号．于是令$\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$；$b_1=b_2$，$f(x)$在$[a_2, b_2]$上又满足定理的假设条件了……．这样反复地作下去，一旦有一次碰上一个区间$[a_k, b_k]$的中点使$f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)=0$时，$\frac{a_k+b_k}{2}$便是$\xi$．如果永远没有这样的中点，就得到两个数列

$\{a_n\}$　$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$

$\{b_n\}$　$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots.$

其中$a_0=a$，$b_0=b$．由于

$$a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1\leqslant b_0.$$

所以$\{a_n\}$单调上升而于上有界，那么必有极限$\xi$．又因为

$$b_n=a_n+\frac{b-a}{2^n},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=\xi+0=\xi.$$

可见$\{a_n\}$与$\{b_n\}$有共同的极限$\xi$．现在证明$f(\xi)=0$．第一，

证明 $f(\xi)\leqslant 0$. 设其不然，而 $f(\xi)>0$，由于 $f(x)$ 在 $\xi$ 点连续，必然 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(\xi)$. 因此当 $n$ 大于某个自然数 $N$ 时，

$$|f(a_n)-f(\xi)|<\frac{f(\xi)}{2}.$$

这时将要出现

$$f(a_n)>\frac{f(\xi)}{2}>0,\quad n>N.$$

这和 $f(a_n)<0$ 矛盾. 所以 $f(\xi)$ 不能是正数，即是 $f(\xi)\leqslant 0$. 同理 $f(\xi)\geqslant 0$. 因此 $f(\xi)=0$. ▌

这定理的假设条件，是充分的，不是必然的. 不能说 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号时，必然没有 $\xi$ 使 $f(\xi)=0$. 还要注意，在 $(a, b)$ 内使 $f(x)=0$ 的点，未必仅有一个.

**附注** 定理 2 的证明方法，是把区间 $[a, b]$ 一半一半地分下去，每个区间是前一区间的一部分，区间之长逐渐缩短，而趋于零. 由一切区间的左端构成单调上升而有上界的数列；一切右端构成单调下降而有下界的数列，这两个数列有共同的极限，如此便确定一点 $\xi$. 这叫做"二分法". 数学分析中时常用这方法证明问题.

从定理 2 很容易转变成下面的介值定理：

**定理 3** 假若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$，而 $c$ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一值. 那么 $[a, b]$ 上至少有一点 $\xi$，满足 $f(\xi)=c$.

【证】 令 $\varphi(x)=f(x)-c$. 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $\varphi(a)=f(a)-c$ 与 $\varphi(b)=f(b)-c$ 符号相反. 所以 $(a, b)$ 内至少有一点 $\xi$，满足 $\varphi(\xi)=0$，即是 $f(\xi)=c$. ▌

**推论** 假设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$M$ 与 $m$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值，$m<y_0<M$. 那么 $[a, b]$ 上至少有一点 $x_0$，满足 $f(x_0)=y_0$.

【证】 假设 $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$, 不妨说 $x_1<x_2$. 那么 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足定理 3 的条件. 至少有 $(x_1, x_2)$ 内的一点 $x_0$ 满足 $f(x_0)=y_0$. 但是 $(x_1, x_2)$ 是 $[a, b]$ 的一部分, 所以 $x_0$ 在 $[a, b]$ 内. ▐

定理 3 和它的推论就是说: 连续函数必能通过(取得)其任意两值之间的一切值, 特别地, 必能取得其上下确界之间的一切值.

【例 1】 试证方程

$$x-2\sin x=0 \tag{4.1}$$

在 $(0, +\infty)$ 有根.

解: 零是方程(4.1)的根, 但是不在 $(0, +\infty)$ 内.

当 $x$ 足够大时, 显然 $\varphi(x)=x-2\sin x>0$. 比如 $x\geqslant\pi$ 时,

$$\varphi(x)\geqslant\pi-2\sin x\geqslant\pi-2|\sin x|\geqslant\pi-2>0.$$

自然 $\varphi(\pi)>0$.

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2<0.$$

所以在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有一点 $\xi$, 使 $\varphi(x)=0$.

【例 2】 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 试证 $[x_1, x_n]$ 上必有一点 $\xi$, 满足

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)^{*)}.$$

【证】 令 $m$ 与 $M$ 分别是 $f(x_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 中的最小与最大者, 比如说 $m=f(x_k)$, $M=f(x_l)$, 而且 $x_k<x_l$. 那么

---

*) $\Sigma$ 是求和记号

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n),$$

其中用 $i$ 区分不同的项, $\Sigma$ 下边的 $i=1$ 表示 $i$ 从 1 开始, 上边的 $n$ 表示 $i$ 到 $n$ 为止.

$$m \leqslant f(x_i) \leqslant M \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

从而
$$m \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \leqslant M.$$

根据介值定理知道$[x_k, x_l]$上必有一点$\xi$，满足

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

$[x_k, x_l]$是$[x_1, x_n]$的一部分，所以$\xi$在$[x_1, x_n]$内。

### 4.3 反函数的连续性

第一章§3.6中说过：函数的每个单调区间有一个反函数，并且证明了反函数与直接函数的上升与下降是一致的。现在证明单调连续函数的反函数一定存在并且连续。

**定理4** 假设$y=f(x)$是$[a, b]$上的单调(不是单调不降或单调不升)连续函数，又$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$。那么在区间$[\alpha, \beta]$上必有$y=f(x)$的连续反函数$x=\varphi(y)$，而且这反函数是唯一的。

【证】 不妨设$y=f(x)$在$[a, b]$上是单调上升的。

第一、证明反函数存在。即是要证明区间$[\alpha, \beta]$上每有一点，必有区间$[a, b]$上的一点和它对应。$\alpha$，$\beta$无疑地分别有$a$，$b$对应。因为$f(x)$单调上升，那么当$x$属于$(a, b)$时，$f(a)<f(x)<f(b)$。这说明$\alpha$与$\beta$分别是$f(x)$在$[a, b]$上的最小与最大值。根据介值定理，对于$(\alpha, \beta)$内的任一点$y_0$，必有$(a, b)$内一点$x_0$使得$f(x_0)=y_0$，我们用这个$x_0$对应于$y_0$。所以反函数$x=\varphi(y)$存在。

第二、证明$x=\varphi(y)$是唯一的反函数。由于$f(x)$单调上升，如果$x>x_0$，那么$f(x)>y_0$；如果$x<x_0$，那么$f(x)<y_0$。只要$x \neq x_0$，$f(x)$便不等于$y_0$，$x$便不能对应于$y_0$。即是说

对应于 $y_0$ 的 $x$ 值只有 $x_0$ 一个．所以反函数只有一个．

第三、证明 $x=\varphi(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续．假设 $\varepsilon$ 是任意小的正数，求证有足够小的正数 $\delta$，保证在 $|y-y_0|<\delta$ 的情况下，

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

令 $\varphi(y)=x$, $\varphi(y_0)=x_0$, 由于 $f(x)$ 单调上升，便有

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\Leftrightarrow f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0-\varepsilon)-f(x_0)<y-y_0<f(x_0+\varepsilon)-f(x_0).$$

取 $\delta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\}$，则

$$|y-y_0|<\delta\Rightarrow|x-x_0|<\varepsilon.$$

最末的不等式就是(4.2)．所以 $\varphi(y)$ 在 $(\alpha, \beta)$ 内的任一点 $y_0$ 连续，也就证明了 $\varphi(y)$ 在 $(\alpha, \beta)$ 内连续．

要证 $\varphi(y)$ 在 $\alpha$ 点连续，只须取 $0\leqslant y-\alpha<\delta$ 即可；要证 $\varphi(y)$ 在 $\beta$ 点连续，则须取 $0\leqslant\beta-y<\delta$． ▌

## 4.4 一致连续

函数在区间上连续(见§3.3)就是在区间上每一点连续．函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的连续性(见§3.1定义1)是从 $x_0$ 一点近旁考虑的．所以区间上的连续是从区间的局部考虑的，不是从区间的整体考虑的．为了弄清楚这话的意思，可以把§3.1的定理1回忆如下：$f(x)$ 在 $x_0$ 点连续即是：

对于任意的 $\varepsilon>0$，总有正数 $\delta$，保证 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<\delta$ 时，满足不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

在极限的定义里，曾经解释过 $\delta$ 可以是 $\varepsilon$ 的函数 $\delta(\varepsilon)$．这里因为 $x_0$ 是固定的一点，所以 $\delta$ 只依赖于 $\varepsilon$．如果 $x_0$ 是不固定的话，那么对于同一个 $\varepsilon$ 在甲处找到的 $\delta$ 未必能用于乙处．从连续曲线直观地来看是容易明白的．图3-25里的曲线左半

较陡，右半较平．$x_0$ 偏右时，如果取了一个最大可能的 $\delta$，对于偏左的 $x_0'$ 就不适用．所以对于同一个 $\varepsilon$，在连续区间某一小部分里适用的 $\delta$，一般地说不适用于区间的另一部分．$\delta$ 实际上与 $x_0$ 有关，是 $\varepsilon$ 和 $x_0$ 的函数 $\delta(\varepsilon, x_0)$．这就是连续定义的局部性．

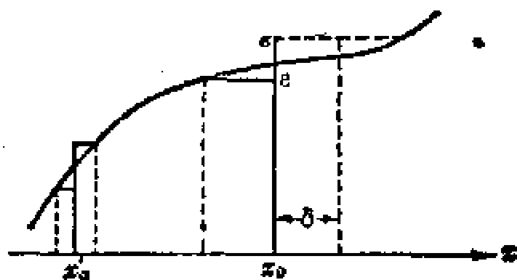



图 3-25

如果给定了 $\varepsilon$，不专对$[a, b]$上特定的 $x_0$ 去找 $\delta$，而要 $\delta$ 能适用于$[a, b]$上的一切点，那就是从$[a, b]$的全局来考虑了．有这种可能吗？答案是肯定的．

【例 1】 函数 $\sin x$ 对于区间 $(-\infty, +\infty)$ 的任何点 $x_0$，有

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0|.$$

对于任意的 $\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，一定

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

这里找到的 $\delta=\varepsilon$ 适用于$(-\infty, +\infty)$内的一切 $x_0$，而与 $x_0$ 无关，确实是只依赖于 $\varepsilon$ 的函数 $\delta(\varepsilon)$．

凡连续函数都能对于同一个 $\varepsilon$ 找到不依赖于 $x_0$ 而只依赖于 $\varepsilon$ 的 $\delta$ 吗？不是的．

【例 2】 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0, +\infty)$上连续．必然对于$(0, +\infty)$内的每一点 $x_0$ 能找到依赖于 $x_0$ 和 $\varepsilon$ 的 $\delta(\varepsilon, x_0)$，使得$|x-x_0|<\delta(\varepsilon, x_0)$能保证$\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$（读者可以证一下 $\delta=\dfrac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}$），但是没有与 $x_0$ 无关的 $\delta(\varepsilon)$ 能实现同一事

实. 下面的反例足以说明这一点.

取 $\varepsilon=1$, 不论正数 $\delta$ 多么小, 总有自然数 $n$ 满足 $n^2>\frac{1}{\delta}$, 令 $x_0=\frac{1}{n}$, $x=\frac{1}{n+1}$, 那么

$$|x-x_0|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\delta.$$

然而
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=(n+1)-n=1=\varepsilon.$$

这即是说, 不论正数 $\delta$ 多么小, 总还有相距小于 $\delta$ 的两点, 函数在这两点上的值相差得不小于 $\varepsilon=1$.

**定义** 假若 $f(x)$ 是定义在区间 $I$ (或开或闭或无穷) 上的函数, 如果给定了任意小的正数 $\varepsilon$, 总有正数 $\delta$, 使得只要 I 里的任意两点 $x'$, $x''$ 合于 $|x'-x''|<\delta$ 时, 必然

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

便说 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续(或均匀连续).

**定理 5** 在闭区间上的连续函数, 也在这区间上一致连续.

证明从略.

## 习 题 十 一

1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且无零点. 试证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内恒为正数, 或恒为负数.
2. 根据连续函数的性质, 验证方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.
3. 设 $a>0$, $b>0$. 试证方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $b+a$.
4. 讨论下列函数的一致连续性:
   (1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $[1, 2]$;
   (2) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$.

## 第五节 无穷小的比较

### 5.1 无穷小的分阶

一个函数或是一个变化着的量中，若是挟带着几个不同的无穷小，为了简化讨论的过程，往往抛弃一部分无关紧要的无穷小．这时自然要拣其中变（趋于零）得快的无穷小舍去，这就遇到了无穷小的比较问题．

假设有若干个不同的无穷小，并且把它们各步的数值排比起来，那么在同一步上各变数的值，应该各不相同．例如：

$$\{s_n\}=\left\{\frac{2}{n^2}\right\},\quad \{t_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\},\quad \{u_n\}=\left\{\frac{3}{n}\right\}.$$

都是无穷小，它们的对应项在 $n>2$ 以后永远满足不等式

$$0<s_n<t_n<u_n.$$

我们自然会以为三个变量在向 0 逼近的过程中，$s_n$ 走得最靠前，$u_n$ 最落后，也就是说 $\{s_n\}$，$\{t_n\}$，$\{u_n\}$ 虽然都是无穷小，但是 $s_n$ 比 $t_n$ 接近于零，比 $u_n$ 更接近于零．

为了把这事看得更清楚，分析一下它们的对应项之比的变化情况，将 $\{s_n\}$，$\{t_n\}$ 都与 $\{u_n\}$ 比较：

$$\frac{s_n}{u_n}=\frac{2}{3n}\to 0,\qquad \frac{t_n}{u_n}=\frac{1}{3}.$$

$t_n$ 永远等于 $u_n$ 的 $\frac{1}{3}$，$s_n$ 等于 $u_n$ 乘以无穷小 $\frac{2}{3n}$，$t_n$ 虽然比 $u_n$ 小，可是与 $s_n$ 比 $u_n$ 小的程度比较起来，却又差得太远了．$\frac{s_n}{t_n}=\frac{2}{n}$ 也是 $\to 0$，所以 $s_n$ 小于 $t_n$ 的程度和 $s_n$ 小于 $u_n$ 相近，却不同于 $t_n$ 小于 $u_n$ 的程度．

另一方面，因为

$$\frac{u_n}{s_n}\to\infty,\quad \frac{t_n}{s_n}\to\infty,\quad \frac{u_n}{t_n}\to 3,$$

可以知道 $u_n$ 大于 $s_n$ 的程度和 $t_n$ 大于 $s_n$ 相似，两者都远远超过 $u_n$ 大于 $t_n$ 的程度.

以上是就数列说的，对于函数的无穷小也是这样来比较它们，其实§2.4里的

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

还有那里的例1

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0;$$

§3.3里的例6

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}.$$

都是关于无穷小的比较.

数学分析就是按两无穷小之比的极限来给它们分等级的.

**定义1** 当两个无穷小 $\alpha$ 与 $\beta$ 之比 $\alpha/\beta$ 的极限等于零时，就说 $\alpha$ 是 $\beta$ 的高阶无穷小；当 $\alpha/\beta$ 的极限是异于零的常数时，就说 $\alpha$ 与 $\beta$ 是同阶无穷小；当 $\alpha/\beta$ 的极限是 $\infty$ 时，就说 $\alpha$ 是 $\beta$ 的低阶无穷小.

前面所举例题中的 $\{s_n\}$ 是 $\{t_n\}$ 的高阶无穷小，$\{u_n\}$ 是 $\{s_n\}$ 的低阶无穷小，$\{t_n\}$ 与 $\{u_n\}$ 是同阶无穷小.

当然要在 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$ 存在之下，才可以比较它们的阶，否则无从比较．例如各自趋于零的变量 $\alpha=x$, $\beta=t$, 无法求它们的比的极限；$\alpha=x\sin\frac{1}{x}$ 与 $\beta=x$ 之比 $\frac{\alpha}{\beta}=\sin\frac{1}{x}$ 没有极限，这些都使我们无法说 $\alpha$ 与 $\beta$ 谁高阶谁低阶.

任何数对于0之比不存在，所以把0当作无穷小时，任何无穷小都不能和它比较.

### 5.2 无穷小的比较

凡当同时比较许多无穷小时，经常要取其中一个作标准，称为标准无穷小；设它是$\delta$，然后规定$\delta^k$为$k$阶无穷小. 若$\beta$与$\delta^k$同阶，便说$\beta$是$\delta$的$k$阶无穷小. $k>1$时，$\beta$是高阶无穷小；$0<k<1$时，$\beta$是低阶无穷小.

**定理1** 假若$\alpha$与$\beta$，$\beta$与$\gamma$都是同阶无穷小，那么$\alpha$与$\gamma$也是同阶无穷小.

【证】 因为$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小，所以

$$\lim \frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0,$$

同理

$$\lim \frac{\beta}{\gamma}=B\neq 0,$$

所以

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=A\cdot B\neq 0. \quad \blacksquare$$

**定理2** 假若$\alpha$是$\beta$的高阶无穷小，$\beta$的阶次不低于$\gamma$，那么$\alpha$是$\gamma$的高阶无穷小.

【例1】 试证$x\to 0$时，$1-\cos x$是$x$的二阶无穷小.

【证】 $$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

所以$1-\cos x$是$x$的二阶无穷小.

【例2】 设$m$为自然数，试证$\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}$是$x$的二

阶无穷小.

【证】 令$\sqrt[m]{1+x}-1=y$,则 $y$ 与 $x$ 同时趋于零,而且

$$x=(1+y)^m-1,$$

因此

$$\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}}{x^2}=\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(1+y)^m-1]^2}$$

$$=\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\cdots}{m^2y^2+\cdots}=\frac{-\frac{m-1}{2}+\cdots}{m^2+\cdots},$$

左右两端各求极限,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2}.$$

## 5.3 等价无穷小

**定义 2** 两无穷小之比的极限等于 1 时称为等价无穷小. $\alpha$ 与 $\beta$ 等价,记作 $\alpha\sim\beta$.

**定理 3** 无穷小 $\alpha$ 与 $\beta$ 等价,必然且只需 $\alpha-\beta$ 是 $\alpha$ 或 $\beta$ 的高阶无穷小.

【证】 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$ 必然且只需

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0.$$

这说明 $\alpha-\beta$ 是 $\beta$ 的高阶无穷小,同样地证明 $\beta-\alpha$ 是 $\alpha$ 的高阶无穷小. ▌

**定理 4** 假若两个无穷小都与第三个无穷小等价,那么这两个无穷小一定等价.

【证】 假设 $\alpha$、$\beta$ 都与 $\gamma$ 等价,那么

$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\beta}{\gamma} = 1$，由此

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left( \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \right) = \lim \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \lim \frac{\gamma}{\beta} = 1. \quad \rrbracket$$

在许多问题里，把一个无穷小换作它的等价无穷小，结果发生的误差，往往不会超过容许的限度，就是因为这误差是高阶无穷小．例如物理学或应用科学中时常用很小的角 $x$ 代替它的正弦，就是因为 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 或 $\sin x \sim x$.

**定理 5** 任意两无穷小之比的极限，等于其等价无穷小之比的极限．

也就是说，假设

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1,$$

那么

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

【证】 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 与 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 之中至少有一个存在，设其为 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$．这时

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'} \right) = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

假若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$，那么 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，因而 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = 0$，从而 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \infty$．仍然得

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}. \quad \rrbracket$$

【例 1】 当 $x \to 0$ 时，$\operatorname{tg} x$ 与 $x$ 是等价无穷小．这因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x+\sin^2x-2x^3}{\operatorname{tg}x+4x^2}$.

解：分子中的 $x$ 是一阶无穷小，$4x^2$，$\sin^2x$ 都与 $x^2$ 同阶，是二阶无穷小，$-2x^3$ 是三阶无穷小．可以在分子中略去第二、第三两项，在分母里略去第二项，再把 $\operatorname{tg}x$ 换作它的等价无穷小 $x$，这样就得到

$$\lim_{x\to0}\frac{5x+\sin^2x-2x^3}{\operatorname{tg}x+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{x}=5.$$

## 习 题 十 二

1．用 $x$ 作标准无穷小，判定下列无穷小的阶：

(1) $x^3+x^5$;　　(2) $\sqrt{x\sin x}$;

(3) $\ln(1+x)$;　　(4) $4x^2+2x^3-7x^5$;

(5) $\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$;　　(6) $\sqrt{\sqrt[3]{x}-x^2}$.

2．下边关于无穷小的两种叙述有无错误？把错的改正过来：

(1) 对于任意的 $\varepsilon>0$，总有自然数 $N$，当 $n>N$ 时，$x_n<\varepsilon$;

(2) 对于任意的 $\varepsilon>0$，有无穷多个 $x_n$，满足 $|x_n|<\varepsilon$.

3．下列两题的解法有无错误？把错的改正过来：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{3x^3+x^2+4}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}^2x-\sec^2x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec^2x=\infty-\infty=0$.

# 第三章小结

这一章大体可以分作三部分，第一、二两节讲函数的极限；第三、四节讲函数的连续性；第五节讲无穷小的分阶．其实第五节是极限理论的余波，因为以后有用，附在这里介绍它一下，不是本章的主要内容．

函数的极限理论，几乎与数列的极限理论完全平行．有

了数列作基础不难理解函数极限的一切理论，尽管后者略有复杂之处，但没有大的困难．$\varepsilon$–$\delta$ 定义是本章甚至是全书的枢纽，没有它便不能讨论函数的极限运算，连续概念也无从说起，而连续函数是微积分研究的主要对象．因此，在第二节里把初等函数的极限统统讨论了一遍．

求函数的极限，是技巧问题，而且是很难的技巧．讲了一些极限运算的定理，虽然可以解决一些问题，但实际上有许多问题的解法，要超出这些定理之外，从 § 2.4 与 § 2.5 所讲的两个极限的证法，可见其一斑．关于这类问题限于篇幅，不能多写，有兴趣的话可以另阅讲得详细的微积分书籍，例如菲赫金哥尔茨著的«微积分教程»．§ 2.4 与 § 2.5 两个极限较为重要，后面有不少理论靠它们解决．

为了讨论函数的连续性，必须先知道函数的极限，为了便于理解函数的极限，就得从数列的极限说起，这就是这两章里一脉相承的连锁关系．当然极限理论还要遁到本书的最后．希望读者从现在起注意这条线索．

连续函数的性质，应该算是重要部分，但是其中的理论生根于实数的连续性．本书既然没有讲实数的一般理论，只好从直观上去理解．其实从实用的角度来看，能这样接受下来，也可以懂得后边的多数问题．

# 第四章

# 导数及微分

要认识一个函数,就是要认识它的变化规律:什么时候上升,什么时候下降,什么时候由升而降,或由降而升;上升的情况可能越来越快,也可能逐渐减弱.要认识这些变化,必须知道函数值的变化速度,以及这变化速度的变化情况.解决这类问题的工具是函数的导数.

知道了函数在各点上的变化趋势,就可以在一点估计函数的微小改变量.这微小的改变量就是微分.导数与微分是微分法的中心内容.本章就一元函数讨论这些问题.

## 第一节 变率与导数

函数一般都是变量,变量的变化有快慢的不同,即变化的速度有大有小.变化的速度叫做*变率*.微分学有很大一部分内容是研究变率的.

大家知道,在运动现象中,距离是时间的函数.距离的变率即是通常所谓*速度*.速度不变的运动是等速运动,等速运动的速度永远等于所行距离对于所经时间之比,这比值与时刻的先后无关,与距离的长短无关(只需距离与时间相对应).

变速运动的速度时时刻刻在改变,这种速度的意义和计算方法是促使微分法产生的一个原因.

## 1.1　直线运动的速度

第二章一开始讨论过自由落体的瞬时速度．不过那时是用数列的极限处理这问题的，但数列的极限有片面性．现在依照那里的原则用函数的极限把问题重新讨论一下．为了从头理解这个问题，暂时假定还没有瞬时速度的概念．

我们坐在进行着的汽车里，会感觉到汽车先后快慢不同，可是速度又不是一下一下跳跃着改变的，于是便意识到速度时时刻刻在改变．对于这样的问题，科学家的任务就是怎样按照自然规律，用数学方法把某个时刻上的快慢程度描写出来．这就是用数学解决实际问题．

假设汽车在时刻 $t_1$ 以前走了 $s_1$ 公里，在 $t_1$ 以后 $\Delta t$ 小时内又走 $\Delta s$ 公里，即令 $t$ 取增量 $\Delta t$，因而所行路程 $s$ 取得对应的增量 $\Delta s$．若用时间 $\Delta t$ 内的平均速度 $\Delta s/\Delta t$ 作为时刻 $t_1$ 上的瞬时速度，可能差得很多．但是若将 $\Delta t$ 缩得很短，比如 $\Delta t=\dfrac{1}{3600}$ 小时，即是只有一秒钟的时间，虽然汽车在 $t_1$ 的真正快慢程度不是 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，可是一秒之内汽车的快慢不会有多大的改变，那么用 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 代替所求的速度，未尝不可．

汽车的运行通常用小时作时间单位，公里作距离单位，的确一秒钟是很短暂的一段时间．若是讨论自由落体问题，通常用秒作时间单位，公尺作距离单位，若还用 $\Delta t=1$ 秒，而以 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 代替我们所求的数的话，那就未免太粗糙了，取 $\Delta t=\dfrac{1}{100}$ 秒或许勉强能用．因此我们应该用 $\Delta t\to 0$ 来研究瞬时速度的问题．

以上的讨论中，若把 $\Delta t$ 取为负数，即是在 $t_1$ 以前一小段

时间里求 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$，显然也可以．我们知道，$|\Delta t|$ 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 越接近于我们所希望的数．假若真有其数为 $v_1$，那么必然

$$\left|v_1-\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

随着 $\Delta t\to 0$ 而趋于 0．也就是说，$v_1$ 应该是 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$．下面用定义明确规定瞬时速度的意义：

**定义 1** 直线运动在时刻 $t_1$ 上的瞬时速度是指 $t_1$ 与 $t_1+\Delta t$ 之间的平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$，当 $\Delta t\to 0$ 时的极限（假若它存在的话）．

虽然只是求 $t_1$ 一点上的速度，可是必须先知道 $t_1$ 前后一小段时间内的一切 $s$ 的值．即是知道物体所行距离 $s$ 依赖于时刻 $t$ 的函数关系

$$s=f(t) \tag{1.1}$$

才能解决这问题．(1.1) 叫做物体的运动方程．去掉 $t_1$ 和 $v_1$ 的脚码，把定义 1 的内容写出来，就是：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

**【例】** 已知自由落体的运动方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中 $s$ 为降落开始后 $t$ 秒钟内下降的距离，$g$ 是重力加速度，求其在降落开始后第 $t_1$ 秒之末的瞬时速度．

**解**：开始降落后到第 $t_1$ 秒之末的下降距离为

$$s=\frac{1}{2}gt_1^2. \tag{1.2}$$

令 $t_1$ 取增量 $\Delta t$，那么在 $t_1+\Delta t$ 时，物体下降到

$$s_1+\Delta s=\frac{1}{2}g(t_1+\Delta t)^2. \qquad (1.3)$$

由(1.3)减(1.2)，得

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(2t_1+\Delta t)\Delta t.$$

求 $\Delta s$ 对于 $\Delta t$ 之比

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t_1+\Delta t).$$

令 $\Delta t$ 趋于零而求极限，那么得落体在时刻 $t_1$ 上的瞬时速度

$$v_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_1+\Delta t)=gt_1. \qquad (1.4)$$

可见自由落体的速度随时间而变化，与降落时间成正比.

在(1.4)中令 $t_1=2$，那么得第 2 秒之末的瞬时速度 $2g$. 这就是第二章 § 1.1 例 2 所讨论的结果.

## 1.2 非均匀杆的密度

物理学里的杆要横断面很小，而且处处的横断面面积一样大. 如果从杆上任意取一样长的两段，它们的质量总相等，便说它是均匀杆. 均匀杆上任何一段的质量与长度之比必是常数 $d$，如果横断面面积是 1 的话，$d$ 就是单位体积内的质量，叫做这均匀杆的密度.

如果杆的物质分布不均匀，杆上一样长的两段便未必质量相同. 一段的质量与这段的长度之比将因这段的位置而不同，这比值就叫做这一段(仍然认为杆的横断面的面积是 1)的平均密度.

现在要说明杆上某一点附近的物质有多密，情况与 § 1.1 讲的瞬时速度一样，需要先知道杆的质量如何因杆长而变化.

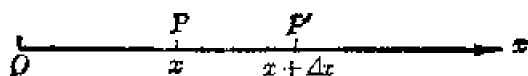



图 4-1

由杆的一端 $O$(图 4-1)量杆的长，设 $OP=x$. 那么 $OP$ 的质量 $m$ 是 $OP$ 的函数:

$$m=\varphi(x).$$

令 $x$ 取增量 $\Delta x$, 设 $OP'=x+\Delta x$. 那么 $m$ 的对应增量为

$$\Delta m=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$$

$PP'$ 的平均密度为

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

用这比值作为 $x$ 点附近物质分布的密度固然未必恰当，但是可以肯定地说，$\Delta x$ 越小这比值就越近于理想.

**定义 2** 非均匀杆上 $(x,\ x+\Delta x)$ 一段上的平均密度，当 $\Delta x$ 趋于零时的极限(如果存在)，叫做这杆在 $x$ 点的*密度*. 即是

$$d=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

以上的讨论里，$x$ 是定点，但是没有用定点的记号标记它. 因为在这极限过程里，$\Delta x$ 是变数，所以这样写 $x$ 无碍于事. 其实这样写法还有好处，比如在前一例题里，不用 $t_1$ 而径直用 $t$ 表示指定的时刻，那么最后的速度等于 $gt$. 这里 $t$ 可以代表降落中的任何时刻，而 $v=gt$ 就是自由落体的速度公式，可以表示一切可能时刻上的速度，用途反而更广泛.

凡是变量，必有变化. 一个变量随另一个变量变化的快慢程度，就是变率. 变率的具体事例多得不胜枚举，不能一一讨论. 处理这种问题的科学办法是把它们抽象了，用函数关系统一起来讨论.

## 1.3 一次函数的变率

关于变量的变率，需要有共同的定义和统一的算法，这就是产生微分学的一个原因. 前面讨论的两个问题，从数学上来看，问题的提法和解决的途径都是一样的方式. 撇开这两个问题的物理意义，都是用自变数的增量去除函数的对应增量，然后求这商在自变数的增量趋于零时的极限. 这极限就是函数的变率.

下面仍然首先讨论均匀变化的函数.

假设

$$y=f(x) \tag{1.5}$$

的变率是常数 $a$，在 $x=x_1$ 时，$y=y_1$. 在这函数的定义域里，不论在哪一点，也不论 $x$ 的增量 $\Delta x$ 多大，$y$ 的增量 $\Delta y$ 与 $\Delta x$ 的比一定等于 $a$，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a. \tag{1.6}$$

若令 $x=x_1+\Delta x$，$y=y_1+\Delta y$，则(1.6)变为

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=a,$$

经过化简，令 $y_1-ax_1=b$，得

$$y=ax+b. \tag{1.7}$$

可见(1.5)是一次函数，而且其中 $x$ 的系数就是函数的变率.

反过来说，在(1.7)中令 $x$ 取增量 $\Delta x$，得

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)+b.$$

从这等式的左右端分别减去(1.7)的左右端，得

$$\Delta y=a\Delta x.$$

这就是(1.6)，所以一次函数的变率是常数，而且这常数就是 $x$ 的系数.

从以上两方面的证明可归纳为一条定理:

函数均匀变化必然且只需它是一次函数，而且变率等于自变数的系数.

## 1.4 导数

一般函数的变化，不仅有快有慢，而且有增有减. 这一切现象都会从变率表现出来.

假设

$$y=f(x),\quad x\in[a,\ b].$$

$x_0$是$[a, b]$上一点，让它取一个增量$\Delta x$，要求$x_0+\Delta x\in[a, b]$. 这时函数对应于$\Delta x$的增量是

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

$f(x)$在$x_0$与$x_0+\Delta x$之间的平均变率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

令$\Delta x\to 0$而求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，这极限就是$f(x)$在$x_0$点的变率. 函数的变率在数学里另有专名，即是

**定义 3** 若$\Delta x$是$x$在$x_0$时的增量，$\Delta y$是$f(x)$的对应增量. 如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，就说这极限是$f(x)$对于$x$在$x_0$时的导数，或微商.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫做左导数，$\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫做右导数. 两者合称为单侧导数. 在区间$[a,\ b]$的左端$a$只能有右导数，右端$b$只能有左导数. 用导数的意义来叙述定义1及定义2，则是:

直线运动的瞬时速度是距离对于时间的导数.

非均匀杆的密度是杆的质量对于杆长的导数.

$f(x)$在$x_0$点有导数，便说$f(x)$在$x_0$点可导．$f(x)$在开区间$(a, b)$内处处有导数，便说$f(x)$在$(a, b)$内可导．当$f(x)$在$(a, b)$内可导时，导数又是$(a, b)$上的函数，所以又可以叫做导函数．§1.3之末关于一次函数的定理，现在可正式叙述为：

**定理1** 函数的导数是常数，必然且只需它是一次函数，而且这导数等于函数中自变量的系数．

关于$y=f(x)$的导数有以下各种符号，可以斟酌方便采用：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{df}{dx}=y'=f'(x)=D_xf(x).$$

若专取$x=x_0$时的导数，就写作

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{d}{dx}f(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$
$$=y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=D_xf(x_0).$$

初学者求$y=f(x)$在某点$x_0$的导数时，应按以下步骤进行：

第一步：求函数在$x=x_0$时的值$y_0=f(x_0)$；

第二步：给$x$一个增量$\Delta x$，并且求函数在$x=x_0+\Delta x$时的值$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$；

第三步：由前两步的结果相减求出$\Delta y$，然后求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

第四步：求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当$\Delta x\to 0$时的极限．

若不指定求$x_0$一点的导数，就把以上各步中的$x_0$一概换作$x$．

【例1】 设$n$是正整数($\geqslant 2$)，求函数

$$y=x^n \tag{1.8}$$

在$x=a$时的导数．

解：当 $x=a$ 时，函数之值是

$$y_0=a^n;$$

当 $x=a+\Delta x$ 时，函数之值是

$$\begin{aligned}y_0+\Delta y&=(a+\Delta x)^n\\&=a^n+na^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots\\&\quad+(\Delta x)^n.\end{aligned}$$

由这等式减前一等式，得

$$\Delta y=na^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 求极限，得

$$y'|_{x=a}=na^{n-1}.$$

如果不特别指定 $x=a$，而让 $x$ 是任意实数，显然

$$y'=nx^{n-1}.$$

这导数的公式好象把 (1.8) 右端的方指数 $n$ 移到方幂的前面当作系数，而把函数降低一次造成的。我们可以这样记这公式，而且不久还会知道不论方指数是什么实数，导数公式都符合这个规律。例如 $n=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\sqrt{x}\quad(x\geqslant 0)$.

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

那么
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

只要 $x>0$，就可以求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

$x=0$ 时，$\Delta y=\sqrt{\Delta x}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在．这说明 $\sqrt{x}$ 在原点没有导数．函数在一点没有导数时，就说它在这点不可导．

特别地，当 $n=1$ 时，函数是 $x$ 本身：$y=x$，导数为 $y'=1$．这就是说：任何变数对于自己的导数等于 1．

$$\frac{dx}{dx}=1 \quad 或 \quad x'=1.$$

【例 2】 试证常数的导数等于零．

【证】 设 $y=f(x)=C$，$C$ 是常数．令 $x$ 任意取增量 $\Delta x$，那么 $f(x+\Delta x)$ 仍等于 $C$，所以 $\Delta y\equiv 0$．从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\equiv 0$，$y'=0$．

【例 3】 求下列函数在原点的导数：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

解：为了简便起见，可以用 $x(\neq 0)$ 本身作为它在原点的增量，于是函数的增量是

$$f(x)-f(0)=x^2\sin\frac{1}{x}-0=x^2\sin\frac{1}{x},$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x\to 0$ 时，右端第二个因式 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量，所以

$$f'(0)=0.$$

【例 4】 试证 $(\sin x)'=\cos x$；

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

【证】 令 $y=\sin x$，则 $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$，由此

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 求极限，得

$$y'=\cos x.$$

令 $y=\cos x$ 则 $y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$，由此

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 求极限，得

$$y'=-\sin x.$$

【例 5】 试证 $(\log_a x)'=\dfrac{\log_a e}{x}$ $(x>0)$.

【证】 令 $y=\log_a x$，则 $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$，由此

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 求极限，得

$$y'=\frac{\log_a e}{x},$$

当 $a=e$ 时，$y=\ln x$,

$$y'=\frac{1}{x}.$$

因为自然对数的导数公式简单，所以在高等数学里，经常运用自然对数。

## 1.5 导数的几何意义

假设函数

$$y=f(x)$$

的图象是曲线 $C$(图 4-2)，$M(x, y)$，$N(x+\Delta x, y+\Delta y)$是曲线上的两点，若 $MQ$ 垂直 $BN$ 于 $Q$，那么 $MQ=\Delta x$，$QN=\Delta y$，而

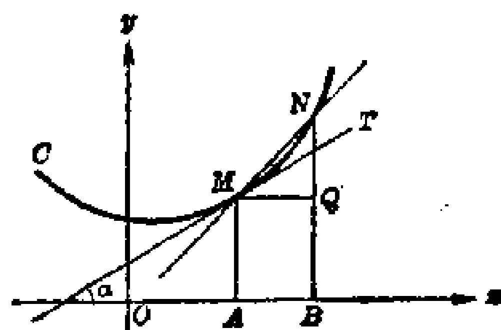


图 4-2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\angle QMN$$

是割线 $MN$ 的斜率．当 $\Delta x\to 0$ 时，$N$ 沿着 $C$ 趋于 $M$，割线 $MN$ 便绕着 $M$ 点旋转，它的极限位置 $MT$ 叫做曲线 $C$ 在 $M$ 点的切线．这时如果函数的导数存在，那么 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x)$，而 $\operatorname{tg}\angle QMN$ 以 $MT$ 的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$ 为极限．所以

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha.$$

**定理 2** 函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 点的导数 $f'(x)$ 等于函数图象在点$(x, f(x))$的切线的斜率．

从图形的直观可看出来：$f'(x)>0$ 时，函数上升；$f'(x)<0$ 时，函数下降．

**附注 1** 当初莱布尼兹就是因为研究曲线的切线和切线的画法而发现了导数的概念．同时牛顿因为研究运动的速度而得到了同一个理论．

**附注 2** 平面几何里圆的切线的定义是和圆仅有一个公

共点的直线．这定义不能用于一般曲线．例如 $x$ 轴与 $y$ 轴都与抛物线 $y=x^2$ 只有一个公共点，而 $y$ 轴不是切线．又如图 4-3 里直线 $MN$ 与曲线 $C$ 不止有一个公共点，然而却不能说 $MN$ 不是切线．所以切线的定义必须另行规定：割线绕其与曲线交点之一旋转，当另一交点与这交点重合时，割线的极限位置叫做切线．重合成一点的交点叫做切点．

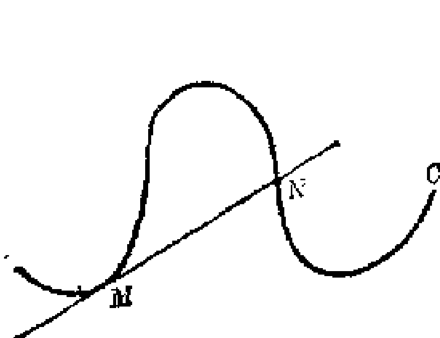



图 4-3

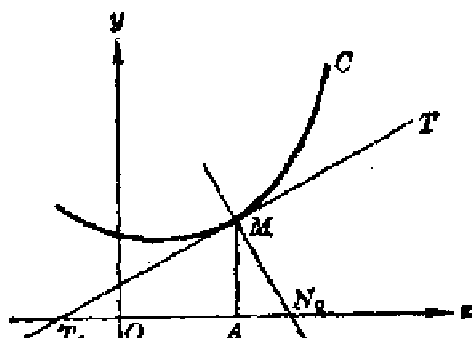



图 4-4

凡涉及切线的问题，都可以用导数解释．下面介绍几个常用的名词：曲线 $C$（图 4-4）在某点 $M$ 的方向，即是切 $C$ 于 $M$ 的切线的方向（方向随着 $M$ 的位置改变）；导数是切线的斜率，所以又时常说导数是曲线的斜率（随着 $M$ 的位置改变）；两曲线的交角即是切两曲线于交点的两切线的交角；通过切点而垂直于切线的直线叫做曲线在这点的法线．

如果 $M$ 点的坐标是 $(x_0, f(x_0))$，那么切线的方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，法线的方程是

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

当 $f'(x_0)=0$ 时，法线平行于 $y$ 轴，方程是 $x=x_0$.

【例】 求抛物线 $y=ax^2$ 在 $(x_0, y_0)$ 点的切线及法线方程，并作图．

解：由所给函数在$(x_0, y_0)$求导数

$$y'\big|_{x=x_0}=2ax_0.$$

所以切线方程是

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0).$$

将$y_0=ax_0^2$代入上式再化简，便得到

$$\frac{1}{2}(y+y_0)=ax_0x.$$

法线方程是

$$y-y_0=\frac{-1}{2ax_0}(x-x_0).$$

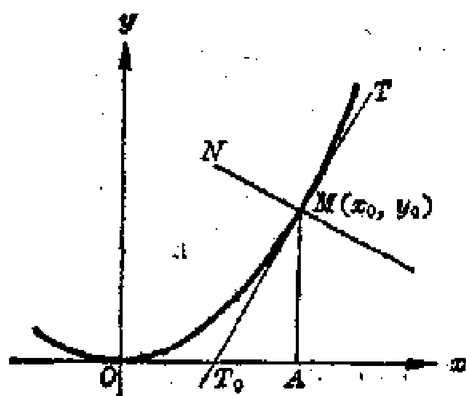


图 4-5

切线的斜率为

$$2ax_0=2\frac{ax_0^2}{x_0}=y_0\Big/\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

为了画切线$MT$，可以按$x_0$的正负在$A$点(图4-5)的左面或右面取一点$T_0$，使$AT_0=\left|\frac{x_0}{2}\right|$，连$T_0M$便是切线；过$M$作$MT$的垂线$MN$便是法线.

## 1.6 导数与连续

函数$y=f(x)$在$x$点的导数存在，即是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\tag{1.9}$$

存在. 从这关系很容易证明下列定理：

**定理3** 假如函数$y=f(x)$在某点的导数存在，那么它一定在这点连续.

【证】 假设

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq\infty.$$

如果 $f'(x)\neq 0$，那么 $\Delta y$ 与 $\Delta x$ 是同阶的无穷小；如果 $f'(x)=0$，那么 $\Delta y$ 是 $\Delta x$ 的高阶无穷小．两种情形都归结为

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0.$$

所以 $f(x)$ 在 $x$ 点连续． ▌

从这定理可以推知，函数在它的间断点上不能有导数．但是也不要以为连续函数必有导数．其实极限(1.9)存在，第一要左右极限都存在；第二要左右极限相等．然而，函数即使在一点连续，这两个条件很可能并不全备．试看：

【例 1】 我们知道函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

连续，但是它在原点的增量(直接用 $y$ 表示)与自变量 $x$ 的增量(直接记作 $x$)之比为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x}.$$

它的左右极限都不存在，所以 $f(x)$ 在原点没有导数．

【例 2】 若将例 1 的函数略加更改

$$y=f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

显然函数在原点仍然连续，但是左导数不存在，虽然右导数存在(等于 1)，在原点还是没有导数．

【例 3】 函数 $y=|x|$ 在原点的左右导数分别等于 $-1$ 及 1，所以也没有导数．

从几何上说，导数决定曲线的方向．例 1 的曲线(图 4-6)

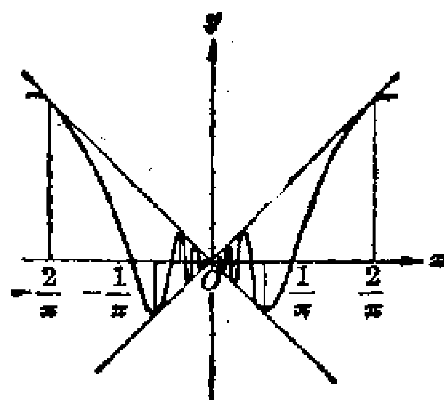



图 4-6

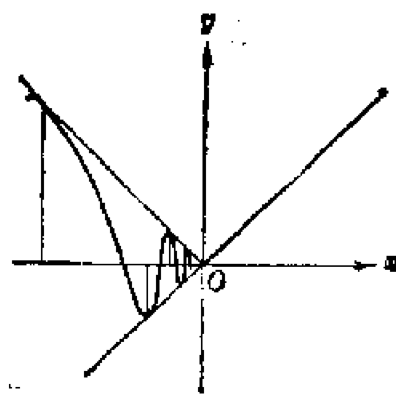



图 4-7

在原点没有确定的方向，在曲线上任取一点 $N(x_0, y_0)$，则当 $x_0$ 趋于零时，割线 $ON$ 在两直线 $y=\pm x$ 之间来回摇摆，永不停止. 例 3 的曲线（图 4-8）在原点形成一个角尖，不能有确定的切线. 例 2 的曲线（图 4-7）从例 1 及例 3 就能看清楚.

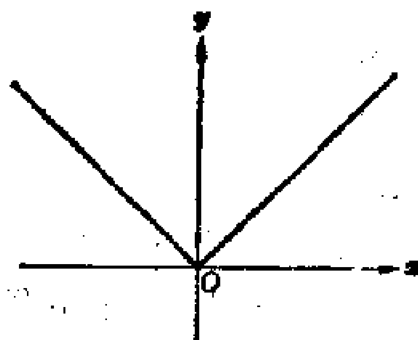



图 4-8

以上三个例题都说明：函数在一点连续，未必在这点有导数，从而未必有确定的切线. 但是反过来说，导数不存在，也未必没有切线.

【例 4】 设 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$，试看它在原点的导数如何.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$，所以导数不存在. 然而函数的图象（图 4-9）是立方抛物线，它在原点不但连续而且有确定的切线，切线是 $y$ 轴.

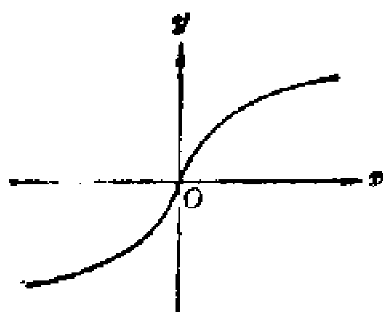



图 4-9

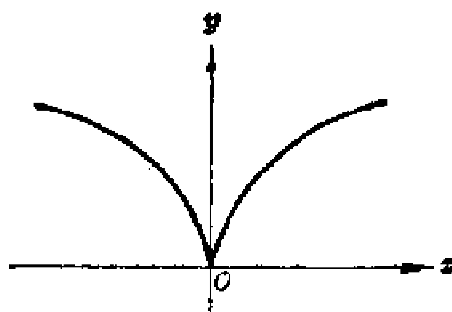



图 4-10

【例 5】 设 $y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 在原点上

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}.$$

于是左导数为 $-\infty$，右导数为 $+\infty$，导数不存在，然而曲线在原点连续．图象(图 4-10)是半立方抛物线，$y$ 轴是它的切线．

**附注** 例 4 和例 5 的情形本应该说函数在原点没有导数，但是有时为了和几何事实相符，也可约定称之为"无穷大导数"．

## 习 题 一

1．从直线运动方程 $s=2t^3-t^2+1$，求 $t=1$，$\Delta t=0.1$ 时的平均速度．

2．求立方抛物线 $y=x^3$ 在点(2，8)的切线的斜率．

3．有一个质量分布不均匀的细杆 $AB$，长 20 厘米，$AM$ 段的质量与从 $A$ 到 $M$ 点的距离平方成正比．已知 $AM=2$ 厘米时，$AM$ 的质量是 8 克．试求：

(1) $AM=2$ 厘米一段上的平均密度；

(2) 全杆的平均密度；

(3) $A$ 点的线密度；

(4) 任意点 $P$ 上的线密度．

4．试证：

(1) $\Delta[f(x)\pm g(x)]=\Delta f(x)\pm\Delta g(x)$；

(2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)$.

5. 按导数定义求下列函数的导数:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$; (2) $y=\sqrt[3]{x}$.

6. 按下列指定的条件求导数的值:

(1) $f(t)=\dfrac{t^3-5t+1}{t^3}$, 求 $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$;

(2) $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 求 $y'(0)$, $y'(1)$.

7. 求 $y=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时的导数值, 并求曲线的相应点上的切线与法线方程.

8. 利用基本导数公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$, 求下列函数的导数:

(1) $y=x^{14}$; (2) $y=x^{-3}$;

(3) $y=\sqrt[3]{x}$; (4) $y=\dfrac{1}{x^3}$;

(5) $y=\sqrt[3]{x^5}$; (6) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

9. 如果 $f(x)$ 是偶函数, 而且 $f'(0)$ 存在, 试证 $f'(0)=0$.

10. 试证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 时连续, 但是 $f'(0)$ 不存在.

## 第二节 导数的运算

求导数的计算叫做微分法. §1.4 讲了几个基本初等函数的导数, 都是按导数的定义及那里所说的步骤求得的. 如果每遇到一个函数就按那方法算一次, 一般来说, 非常麻烦. 因此在求大量函数的导数时, 有必要找一种化繁为简的方法. 当初莱布尼兹为了解决这个问题, 费了很大的精力, 按照通常

函数的结构，导出了一套微分法则，1684 年发表在 Acta Eruditorium 上. 这套法则十分完备，任何初等函数，都能用它来求导数，其间不必具体施行极限运算，只需进行一些机械的工作. 下面我们就按这原则，展开微分算法.

导数是一种特定格式的极限. 前章所讲的极限理论，都要在这里发挥作用，同时又可以加深我们对于极限的认识.

本节用的 $u$, $v$, $w$ 都代表 $x$ 的连续函数且可导. 为了方便，再把 §1.4 例 2 的结论列为定理，写在这里：

**定理 1** 常数的导数等于零.

$$C'=0.$$

## 2.1 函数之和的导数

**定理 2** 两函数的代数和的导数等于各函数的导数的同样代数和.

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

【证】 假设

$$y=u\pm v, \tag{2.1}$$

令自变量 $x$ 取增量 $\Delta x$，则 $u$, $v$ 各有对应的增量 $\Delta u$, $\Delta v$，从而取得相应增量的新 $y$ 值是

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v). \tag{2.2}$$

由(2.2)减(2.1)，得函数的增量

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v.$$

两端同除以 $\Delta x$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to0$ 而求极限，得

$$y'=u'\pm v'. \blacksquare$$

用数学归纳法可以证明:

**推论**　任意$n$个函数的代数和的导数，等于各函数的导数的同样代数和.

$$(u+v+\cdots+w)'=u'+v'+\cdots+w'.$$

【例 1】　求 $\sin x+\cos x$ 的导数.

解: $(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$.

【例 2】　求 $y=x^3-\sqrt{x}$ 的导数.

解: $y'=3x^2-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

## 2.2　函数之积的导数

**定理 3**　两函数之积的导数等于每个函数乘另一函数的导数之积的和.

$$(uv)'=uv'+vu'. \tag{2.3}$$

【证】　令

$$y=uv, \tag{2.4}$$

那么当$x$取增量$\Delta x$之后,得

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v). \tag{2.5}$$

由(2.5)减(2.4)再除以$\Delta x$, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\&=uv'+vu'+0\cdot v'.\end{aligned}$$

即是

$$y'=uv'+vu'. \blacksquare$$

**推论 1**　常数与函数之积的导数等于这常数与这函数的导数之积.

$$(Cu)'=Cu'.$$

【证】 在(2.3)里令 $v=C$，则 $v'=0$. 】

这推论就是说，求导数时可把常数因子提出来，放在微分记号外面.

定理 3 可以一步步地推广至任何几个函数之积. 例如 $y=uvw$ 时，

$$\begin{aligned} y'=(uvw)'&=(uv)w'+(uv)'w \\ &=uvw'+(uv'+u'v)w \\ &=uvw'+uv'w+u'vw. \end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明:

**推论 2** $n$ 个函数之积的导数，是 $n$ 个乘积之和，其中每个乘积是将原来 $n$ 个函数之一换为它的导数而构成的.

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n'.$$

假如 $u_1=u_2=\cdots=u_n$，这公式就变为

$$(u^n)'=nu^{n-1}u'. \tag{2.6}$$

这是 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 的推广，因为 $u=x$ 时，$u'=1$.

【例 1】 求 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解: 
$$\begin{aligned} y'&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)' \\ &=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+a_n' \\ &=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}. \end{aligned}$$

【例 2】 求 $y=\sin x\cos x$ 的导数.

解: 
$$\begin{aligned} y'&=(\sin x\cos x)' \\ &=\sin x(\cos x)'+\cos x(\sin x)' \\ &=-\sin^2 x+\cos^2 x=\cos 2x. \end{aligned}$$

【例 3】 求 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ 的导数.

解一: 根据函数之积的导数公式

$$y'=(x+1)'(x-1)(x-2)+(x+1)(x-1)'(x-2)$$
$$+(x+1)(x-1)(x-2)'$$
$$=1\cdot(x-1)(x-2)+(x+1)\cdot1\cdot(x-2)$$
$$+(x+1)(x-1)\cdot1$$
$$=(x^2-3x+2)+(x^2-x-2)+(x^2-1)$$
$$=3x^2-4x-1.$$

解二：将函数变为多项式

$$y=x^3-2x^2-x+2,$$
$$y'=(x^3-2x^2-x+2)'=3x^2-4x-1.$$

【例 4】 求 $y=(x-3)^2(x-1)^2$ 的导数.

解：$y'=(x-3)^2[(x-1)^2]'+(x-1)^2[(x-3)^2]'$

$$=(x-3)^2\cdot2(x-1)(x-1)'$$
$$+(x-1)^2\cdot2(x-3)(x-3)'$$
$$=2(x-3)^2(x-1)+2(x-3)(x-1)^2$$
$$=2(x-3)(x-1)[(x-3)+(x-1)]$$
$$=4(x-3)(x-1)(x-2).$$

【例 5】 求 $y=x^2\log_a x$ 的导数.

解：$y'=x^2(\log_a x)'+(x^2)'\log_a x$

$$=x^2\cdot\frac{1}{x\ln a}+2x\log_a x=x(\log_a e+2\log_a x)$$
$$=x\log_a(ex^2).$$

## 2.3 函数之商的导数

**定理 4** 两函数之商的导数是一个分式，它的分子等于原分母乘原分子的导数减去原分子乘原分母的导数；分母等于原分母的平方。

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{2.7}$$

【证】 令 $y=\frac{u}{v}$，则 $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$，由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}}{\Delta x}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x(v+\Delta v)v}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

令 $\Delta x\to 0$ 而求极限，得

$$y'=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \quad \rbrack$$

【例 1】 求函数 $y=\frac{2-3x}{2+3x}$ 的导数。

解：
$$y'=\frac{(2+3x)(2-3x)'-(2-3x)(2+3x)'}{(2+3x)^2}$$
$$=\frac{-3(2+3x)-3(2-3x)}{(2+3x)^2}=-\frac{12}{(2+3x)^2}.$$

【例 2】 求 $\operatorname{tg} x$ 与 $\operatorname{ctg} x$ 的导数。

解：
$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$
$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x(\cos x)'-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

如果(2.7)中的分子 $u$ 是常数 $C$，公式就变为

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}. \tag{2.8}$$

如果分母 $v$ 是常数 $C$，就把 $\frac{1}{C}$ 看作常数 $C_1$，然后按

$$(C_1u)'=C_1u'=\frac{u'}{C}$$

求导数.

【例 3】 求 $(\sec x)'$ 与 $(\csc x)'$.

解: $$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\cdot\sec x.$$

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\cdot\csc x.$$

【例 4】 若 $n$ 是正整数，求 $y=u^{-n}$ 的导数。

解: 根据公式(2.8)

$$y=\left(\frac{1}{u^n}\right)'=\frac{-1(u^n)'}{u^{2n}}=\frac{-nu^{n-1}u'}{u^{2n}}=-nu^{-n-1}u'.$$

所以 $$(u^{-n})'=-nu^{-n-1}u'.$$

这是把(2.6)推广到 $n$ 是负整数的情形. 当然这也包括

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^{-n})'=-nx^{-n-1}.$$

【例 5】 在一个容器里装有一公升纯酒精，如果以每秒 $\frac{1}{10}$ 公升的速度往容器里注水，求酒精浓度的变化规律.

解: 注水 $t$ 秒后，器内混合液 $1+\frac{t}{10}$ 公升，纯酒精 1 公升，酒精浓度是

$$p=\frac{1}{1+\frac{t}{10}}=\frac{10}{10+t}.$$

由此 $$p'=\frac{-10(10+t)'}{(10+t)^2}=-\frac{10}{(10+t)^2}.$$

导数是负数说明浓度下降，下降的速度随着时间 $t$ 按 $\frac{10}{(10+t)^2}$ 变化.

## 2.4 复合函数的导数

构成初等函数时，对于常数及变量要施行四则运算和函数的复合. 定理 1 至定理 4 只能求一切有理函数的导数. 没有复合函数的导数公式，就使很多函数的导数很难计算. 这是我们现在亟待解决的问题.

**定理 5** 假设函数 $u=\varphi(x)$ 在某点 $x$ 有导数 $u'_x=\varphi'(x)$，又函数 $y=f(u)$ 在对应的点 $u$ 有导数 $y'_u=f'(u)$，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x$ 点有导数，并且

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'_u[\varphi(x)]\varphi'(x), \tag{2.9}$$

或者简写为

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{2.10}$$

记号 $f'_u[\varphi(x)]$ 里，$f'$ 右下角注的字母 $u$，表示 $f'_u$ 代表的函数关系，是 $f(u)$ 对于 $u$ 的导(函)数，而不是对于 $x$ 的导数. 因为现在要取 $\varphi(x)$ 作为 $u$ 的值，所以在 $f'_u[\ ]$ 里要用 $\varphi(x)$ 代替 $u$.

【证】 令 $x$ 取增量 $\Delta x$，$u=\varphi(x)$ 便有相应的增量 $\Delta u$，这又引起 $y=f(u)$ 的增量 $\Delta y$. 现在有一点情况需要说明：虽然我们假设了 $u'_x$ 存在，但是不敢说 $\Delta u$ 在 $\Delta x\to 0$ 的过程中永不为零. 有时它可以永远是零；例如 $\varphi(x)$ 是常量函数；也可以无限次等于零，例如 $x\to 0$ 时的 $x^2\sin\frac{1}{x}$.

如果 $|\Delta x|$ 小到某个程度以后，$\Delta u$ 永不为零，显然可以把

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$改写为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{2.11}$$

根据第一节定理3知道，$\varphi(x)$连续，那么$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$. 根据乘积的极限的定理，将(2.11)两端取极限，得(2.10).

如果不论$|\Delta x|$多小，$\Delta u$总还能等于零，就要借$f'(u)$的存在来证明：

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,\quad 其中\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0.$$

当$\Delta u\neq 0$时，

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u; \tag{2.12}$$

当$\Delta u=0$时，

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=f(u)-f(u)=0.$$

这等式可以概括在(2.12)之中，即是不论$\Delta u$是否总能等于零，(2.12)一定成立. 将(2.12)两端除以不等于零的$\Delta x$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

令$\Delta x\to 0$而求极限，此时$\Delta u\to 0$，从而$\alpha\to 0$. 又已知$\varphi'(x)$存在，所以$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\varphi'(x)$. 由此

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=f'(u)\cdot\varphi'(x)+0\cdot\varphi'(x)\\&=f'(u)\cdot\varphi'(x).\end{aligned}$$

将右端的$u$换作$\varphi(x)$，便是(2.9). 】

其实前边证过的(2.6)，就是复合函数

$$y=u^n,\quad u=u(x)$$

的导数公式.

定理 5 可以用数学归纳法推广到任何几层的复合函数，例如对于三层的复合函数

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x)$$

的导数公式是

$$y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_v(v)\cdot\psi'_x(x).$$

形式上这公式是按复合函数的层次把它们各自的导数一个连一个地乘起来，所以这种微分法也叫做链导法.

§1.4 例 4 与 §2.3 例2、例 3，已经将六种三角函数的导数求出来了，§1.4 的例 5 又推导了对数函数的导数. 以后应用较多的是 $\sin u$, $\cos u$, $\log_a u$ 形状的复合函数，其中

$$u=u(x)$$

是可导的函数. 为了以后应用方便，现在把这些导数都按复合函数推广并且列为公式.

**定理 6** $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$; $\quad(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

$(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$; $\quad(\operatorname{ctg} u)'=-\csc^2 u\cdot u'$;

$(\sec u)'=\sec u\cdot\operatorname{tg} u\cdot u'$;

$(\csc u)'=-\csc u\cdot\operatorname{ctg} u\cdot u'$;

$$(\log_a u)'=\frac{\log_a e u'}{u};\qquad(\ln u)'=\frac{u'}{u}.$$

注意：这里三角函数的自变量一定要用弧度作单位，原因是证明这些公式时，都直接或间接地用了

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

如果不是用弧度作单位，公式就不这样简单了.

【例 1】 求 $y=\ln(\sin x)$的导数。

解：$y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$。

【例 2】 求 $y=\sin(\ln x)$的导数。

解：$y'=\cos(\ln x)(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$。

【例 3】 求 $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$的导数。

解：
$$
\begin{aligned}
y'&=\frac{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)'}{(x\cos x-\sin x)^2}-\frac{(x\sin x+\cos x)(x\cos x-\sin x)'}{(x\cos x-\sin x)^2}\\
&=\frac{(x\cos x-\sin x)(x\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}-\frac{(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}\\
&=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}.
\end{aligned}
$$

【例 4】 求 $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$的导数。

解：
$$
\begin{aligned}
y'&=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)'}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\\
&=\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}.
\end{aligned}
$$

【例 5】 求 $y=e^x\ln(x+a)$的导数。

解：$y'=e^x[\ln(x+a)]'+(e^x)'\ln(x+a)$

$$=e^x\frac{(x+a)'}{x+a}+e^x\ln(x+a)$$

$$=e^x\left[\frac{1}{x+a}+\ln(x+a)\right].$$

【例 6】 已知 $\varphi(u)$ 的导数存在. 试求下列各函数的导数：

$\varphi(e^x)$， $\varphi(\ln x)$， $[\varphi(x+a)]^n$， $\varphi[(x+a)^n]$.

解：$[\varphi(e^x)]'=\varphi'(e^x)(e^x)'=e^x\varphi'(e^x)$.

$$[\varphi(\ln x)]'=\varphi'(\ln x)(\ln x)'=\frac{1}{x}\varphi'(\ln x).$$

$$\{[\varphi(x+a)]^n\}'=n[\varphi(x+a)]^{n-1}[\varphi(x+a)]'$$

$$=n[\varphi(x+a)]^{n-1}\varphi'(x+a)(x+a)'$$

$$=n[\varphi(x+a)]^{n-1}\varphi'(x+a).$$

$$\{\varphi[(x+a)^n]\}'=\varphi'[(x+a)^n][(x+a)^n]'$$

$$=\varphi'[(x+a)^n]n(x+a)^{n-1}(x+a)'$$

$$=n(x+a)^{n-1}\varphi'[(x+a)^n].$$

【例 7】 求简谐振动 $s=A\sin\omega t$ 的速度.

解：速度是距离 $s$ 对于时间 $t$ 的导数，所以

$$v(t)=s'=A\omega\cos\omega t.$$

读者可以把 $s'$ 的正、负、大、小和物体运动的进、退、快、慢对比一下，看看是否符合.

## 习 题 二

1. 求下列各函数的导数：

(1) $y=3x^2-5x+1$；　　(2) $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$；

(3) $y=\sqrt{2}(x^3-\sqrt{x}+1)$；　　(4) $y=(v+1)^2(v-1)$；

(5) $y=\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$，　$a$, $b$, $c$ 是常数；

(6) $y=\sin x+\cos x$;

(7) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

(8) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

(9) $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$;

(10) $y=\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$;

(11) $y=x^2\log_3 x$;

(12) $y=x\ln x$;

(13) $y=\dfrac{x-1}{\log_2 x}$;

(14) $y=x\sin x\ln x$;

(15) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

2．求下列复合函数的导数：

(1) $y=(x^3-x)^6$;

(2) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;

(3) $y=3\sin(3x+5)$;

(4) $y=\cos^2 x$;

(5) $y=\sin^3\dfrac{x}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

(6) $y=\sin^n x\cos nx$;

(7) $y=\sin^2(2x-1)$;

(8) $y=\sqrt{1+(\ln x)^2}$;

(9) $y=\log_2(x^3-3x^2+x)$;

(10) $y=\dfrac{1}{\ln x}$;

(11) $y=(\ln x^2)^3$;

(12) $y=\ln\ln\ln x$;

(13) $y=\log_5\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$;

(14) $y=\sin^2(\cos 3x)$;

(15) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$;

(16) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(17) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(18) $y=\sec^2(\ln x)$;

(19) $y=\operatorname{ctg}(\sqrt[3]{1+x^2})$;

(20) $y=\csc\sqrt{1+2x}$.

3．假设 $f(x)$ 是可求导数的函数，求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(f(f(x)))$.

## 第三节 反函数的导数

### 3.1 反函数的导数

关于基本初等函数的导数公式还有反三角函数未曾讲. 反三角函数的导数需要从三角函数的导数来推算，因此有必要先讨论一般直接函数与反函数的导数的关系.

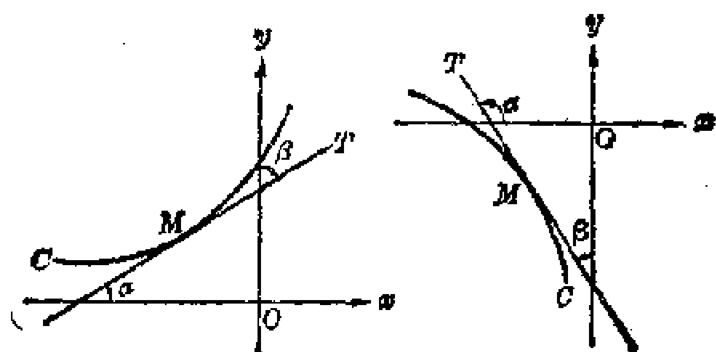



图 4-11

在未讨论之前，我们先从几何上直观地看一下这两个导数有什么关系? 假设曲线 $C$ (图 4-11) 是函数 $y=f(x)$ 的图象，且 $f'(x)$ 存在. $C$ 也是它的本义反函数

$$x=\varphi(y)$$

的图象，切 $C$ 于点 $M(x, y)$ 的直线的斜角是 $\alpha$,

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x).$$

$MT$ 也是反函数 $x=\varphi(y)$ 的切线，它对于 $y$ 轴的斜角 $\beta$ 应当以 $y$ 轴为始边，以切线为终边; 把 $y$ 轴当作自变量的轴时，$\beta$ 以顺时针方向为正(图 4-11 左图); 逆时针方向为负(图 4-11 右图)，两种情形都必须

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$，或者 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

下面用 $(\arcsin x)'$ 验证一下上边的结果。

令 $y=\arcsin x$，则

$$y+\Delta y=\arcsin(x+\Delta x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x},$$

到这里无法直接进行极限的运算了. 但是

$$x=\sin y,\quad x+\Delta x=\sin(y+\Delta y).$$

那么 $\Delta x=\sin(y+\Delta y)-\sin y$. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y)-\sin y}.$$

如果 $\Delta y\neq 0$，就可以变作

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}.$$

因为 $y=\arcsin x$ 连续，那么 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$. 如果

$$(\sin y)'=\cos y\neq 0,$$

从上边的等式取极限，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}.$$

这就是说

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}.$$

这正好和几何的直观现象相符，即是互为反函数的两个函数，在对应的同一点上的导数互为倒数.

我们证明一般的定理：

**定理 1** 如果函数 $y=f(x)$ 有单调的反函数 $x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$ 有不等于零的导数 $\varphi'(y_0)$，$x_0=\varphi(y_0)$. 那么 $f'(x_0)$ 存在，而且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

【证】 已知 $x_0=\varphi(y_0)$，再假设 $x_0+\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)$，那么 $y_0=f(x_0)$，$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$. 现在要证明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在.

首先要证明 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$:

$\varphi'(y_0)$存在$\Rightarrow\varphi(y)$在 $y_0$ 点连续(§ 1.6 定理 3)

$\Rightarrow f(x)$在 $x_0$ 点连续(第三章 § 4.3)

$\Rightarrow\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$.

其次要证明 $\Delta x\neq 0$ 时，$\Delta y\neq 0$:

$\varphi(y)$单调$\Rightarrow$仅当 $\Delta y=0$ 时，$\Delta x=0$

$\Rightarrow\Delta x\neq 0$ 时，$\Delta y\neq 0$.

这说明 $\Delta y$ 可以作除数.

最后看 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 只要 $\Delta x\neq 0$，便一定 $\Delta y\neq 0$. 那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 取极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}\quad(\text{因为 }\Delta x\to 0\text{ 时, }\Delta y\to 0),$$

已知 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\varphi'(y_0)\neq 0$，所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，而且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

【例 1】 证明

$$(a^x)'=a^x\ln a;\tag{3.1}$$

$$(e^x)'=e^x.\tag{3.2}$$

【证】 设 $y=a^x$，取自然对数，解得反函数

$$x=\frac{\ln y}{\ln a}.$$

这反函数的导数是

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y\ln a}.$$

根据定理 1, 知道直接函数 $y=a^x$ 的导数是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=y\ln a.$$

但是最后结果里包含着的 $y$ 应该换作 $a^x$, 所以

$$\frac{dy}{dx}=a^x\ln a,$$

这就是(3.1). 令 $a=e$, 便得到(3.2).

现在把定理 1 的用法归纳概括如下, 凡当 $y=f(x)$ 的导数不易求, 而反函数 $x=\varphi(y)$ 的导数容易求时, 就根据定理 1 去求:

第一步: 将所给函数 $y=f(x)$ 转变为反函数 $x=\varphi(y)$, 并且求它的导数 $\varphi'(y)$;

第二步: 根据定理 1 知道

$$f'(x)=1/\varphi'(y);$$

第三步: 为了把 $f'(x)$ 写成 $x$ 的函数, 再把结果里的 $y$ 换作 $f(x)$, 即得

$$f'(x)=1/\varphi'[f(x)].$$

## 3.2 指数函数的导数

前段例 1 已经讨论了基本指数函数的导数, 现在再按复合函数把它推广作为定理.

**定理 2**

$$(a^u)'=\ln a\cdot a^u\cdot u';$$

$$(e^u)'=e^u\cdot u'.$$

**定理3** 对于任何实数$n$，$u^n$的导数是

$$(u^n)'=nu^{n-1}u'.$$

【证】 设$y=u^n$，变为指数函数

$$y=e^{n\ln u},$$

按复合函数求它的导数，得

$$y'=(e^{n\ln u})'=e^{n\ln u}(n\ln u)'$$

$$=nu^n\cdot\frac{u'}{u}=nu^{n-1}\cdot u'.$$

特别地$(x^n)'=nx^{n-1}$.

**定理4** $(\mathrm{ch}u)'=\mathrm{sh}\,u\cdot u'$;

$$(\mathrm{sh}\,u)'=\mathrm{ch}\,u\cdot u';$$

$$(\mathrm{th}u)'=\frac{u'}{\mathrm{ch}^2u}=\mathrm{sech}^2u\cdot u';$$

$$(\mathrm{arg\,ch}\,u)'=[\ln(u\pm\sqrt{u^2-1})]'=\pm\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}};$$

$$(\mathrm{arg\,sh}\,u)'=[\ln(u+\sqrt{u^2+1})]'=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}};$$

$$(\mathrm{arg\,th}\,u)'=\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]'=\frac{u'}{1-u^2}.$$

这些公式都很容易证明，现在只拣一两个证一下，其余请读者补证.

【证】 $(\mathrm{th}\,u)'=\left(\frac{\mathrm{sh}\,u}{\mathrm{ch}\,u}\right)'=\frac{\mathrm{ch}\,u(\mathrm{sh}\,u)'-(\mathrm{sh}\,u)(\mathrm{ch}\,u)'}{\mathrm{ch}^2u}$

$$=\frac{(\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}^2u)u'}{\mathrm{ch}^2u}=\frac{u'}{\mathrm{ch}^2u}.$$

设$y=\mathrm{arg\,ch}\,u$，则$u=\mathrm{ch}\,y$，由此

$$u'_y=\mathrm{sh}\,y=\pm\sqrt{\mathrm{ch}^2y-1}.$$

$u$本来是$x$的函数，因为把$x$看作$y$的函数，那么$u'_y$应是复合函数的导数$u'_xx'_y$，所以

$$u'_x x'_y = \pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 y - 1} = \pm\sqrt{u^2-1},$$

$$x'_y = \frac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u'_x} = \frac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u'},$$

$$y' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{u'}{\pm\sqrt{u^2-1}}.$$

【例】 已知曲线 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 的切线的斜率是 $\frac{3}{4}$，求这切线的方程.

解：由 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 求得

$$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

现在求切点的坐标．令 $y'=\frac{3}{4}$，于是切点的坐标应该满足方程：

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{3}{4}.$$

由此解得 $e^x=2$ $\left(舍弃不合理的根 -\frac{1}{2}\right)$，那么 $x=\ln 2$．代入曲线（图 4-12）方程 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，求得 $y=\frac{5}{4}$．从而得切点 $P\left(\ln 2, \frac{5}{4}\right)$；

切线方程是

$$y-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}(x-\ln 2),$$

化简得

$$3x-4y+5-\ln 8=0.$$

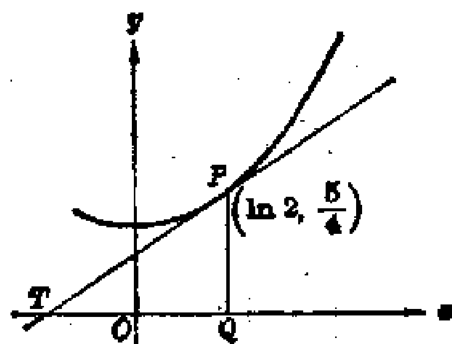


图 4-12

为了验证这结果，可以求这切线在 $x$ 轴上的截距 $OT=\ln 2-\frac{5}{3}$，于是

$$TQ=\ln 2-\left(\ln 2-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3},$$

已知 $QP=\frac{5}{4}$, 所以 $\operatorname{tg}\angle QTP=\frac{5}{4}\Big/\frac{5}{3}=\frac{3}{4}$. 这与问题的要求符合.

## 3.3 反三角函数的导数

§3.1 已经基本上把反正弦函数的导数求出来了. 现在把它完成起来: 那里已知

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y},$$

因为 $\cos^2 y=1-\sin^2 y$, 但是 $\sin y=x$, 所以

$$\cos y=\pm\sqrt{1-x^2},$$

因此

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.3}$$

这里需要把等式右端的符号从导数的几何意义上去分析一下: 因为导数是切线的斜率, 那么导数的正负关系着切线的方向.

导数$>0\Leftrightarrow$切线的斜角是锐角$\Rightarrow$曲线上升;

导数$<0\Leftrightarrow$切线的斜角是钝角$\Rightarrow$曲线下降.

所以(3.3)里的正负号表示 $\arcsin x$ 可以上升也可以下降. 实际情形也确是这样. 因为反正弦有无穷多值, 它在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调上升, 那么它的导数应该是正数; 反正弦在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调下降, 它的导数应该是负数.

因为普通都取主值, 在这种约定之下, 则

$$(\operatorname{arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

设 $y=\operatorname{arc}\cos x$，则 $x=\cos y$，于是

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y.$$

从此知道
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin y}=\frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

这里正负号的意义和方才一样，对于主值来说，应该是

$$(\operatorname{arc}\cos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

设 $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$，则 $x=\operatorname{tg} y$，于是

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2,$$

所以
$$(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同理，
$$(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}.$$

设 $y=\operatorname{arc}\sec x$，则 $x=\sec y$，于是

$$\frac{dx}{dy}=\sec y\operatorname{tg} y=x\left(\pm\sqrt{x^2-1}\right).$$

反正割的主值和反余弦的主值一样，在第一、二两象限之内，反正割上升，所以

$$(\operatorname{arc}\sec x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

同理
$$(\operatorname{arc}\csc x)'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

现在再按复合函数把这六种反函数的导数用定理肯定下来。

**定理 5** $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

$$(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)'=\frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\operatorname{arc\,sec} u)'=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}};$$

$$(\operatorname{arc\,csc} u)'=-\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

**【例 1】** $(\operatorname{arc\,tg} x^2)'=\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}=\frac{2x}{1+x^4}.$

**【例 2】** $[\ln(\operatorname{arc\,tg} x)]'=\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}(\operatorname{arc\,tg} x)'$

$$=\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}.$$

**【例 3】** $\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{2}{1+x^2}.$

如果从 $\cos 2\theta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$ 认识到 $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arc\,tg} x$，计算工作还可以省事一些.

**【例 4】** $[(\operatorname{arc\,tg} x^p)^q]'=q(\operatorname{arc\,tg} x^p)^{q-1}(\operatorname{arc\,tg} x^p)'$

$$=q(\operatorname{arc\,tg} x^p)^{q-1}\frac{(x^p)'}{1+x^{2p}}$$

$$=pq(\operatorname{arc\,tg} x^p)^{q-1}\frac{x^{p-1}}{1+x^{2p}}.$$

【例5】 求 $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$ 的导数.

解: $\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=2\operatorname{arc\,tg}x$,

所以
$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{2}{1+x^2}.$$

【例6】 求 $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$ 的导数.

解: $\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}1$,

所以
$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}\right)'=(\operatorname{arc\,tg}x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

【例7】 求 $\arcsin(3x-4x^3)$ 的导数.

解: $\arcsin(3x-4x^3)=3\arcsin x$,

所以
$$[\arcsin(3x-4x^3)]'=3(\arcsin x)'=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

【例8】 对于 $x^2$ 求 $\lg x$ 的导数(以 $x^2$ 为自变量求导数).

解: 令 $t=x^2$, 问题就是求 $y=\lg x$ 对于 $t$ 的导数, 这应该把 $x$ 看作 $t$ 的函数, 按复合函数求导数, 其中要用 $\frac{dx}{dt}$. 现在知道 $t$ 是 $x$ 的函数, 应该按反函数的导数求 $\frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dt}{dx}=2x,\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2x}.$$

所以
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\lg e}{x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{\lg e}{2x^2}.$$

## 3.4 主要导数公式表

现在把前面学过的导数公式汇集在一起,以便于检查,读者必须在练习中将这些公式记清记牢.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(uv)' = uv' + vu',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

$$C' = 0.$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

$$(a^u)' = \ln a \cdot a^u u',$$

$$(e^u)' = e^u u'.$$

$$(\log_a u)' = \frac{\log_a e}{u} u' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'.$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -\csc^2 u \cdot u'.$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

【例 1】 $$(\sqrt{\sin\sqrt{x}})'=\frac{1}{2}\frac{(\sin\sqrt{x})'}{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}(\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}.$$

【例 2】 $$(e^x\arcsin x)'=e^x(\arcsin x)'+\arcsin x(e^x)'$$

$$=e^x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right).$$

【例 3】 $$(e^{ax}\sin bx)'=e^{ax}(\sin bx)'+\sin bx(e^{ax})'$$

$$=e^{ax}b\cos bx+ae^{ax}\sin bx$$

$$=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx).$$

【例 4】 $$(\sqrt[n]{a+x})'=[(a+x)^{\frac{1}{n}}]'$$

$$=\frac{1}{n}(a+x)^{\frac{1}{n}-1}(a+x)'=\frac{1}{n}(a+x)^{\frac{1-n}{n}}.$$

【例 5】 $$[(\arcsin x)^m(\arccos x)^n]'$$

$$=(\arcsin x)^m\cdot n(\arccos x)^{n-1}(\arccos x)'$$

$$+(\arccos x)^n m(\arcsin x)^{m-1}(\arcsin x)'$$

$$=(\arcsin x)^{m-1}(\arccos x)^{n-1}$$

$$\times\left(\frac{n\arcsin x}{-\sqrt{1-x^2}}+\frac{m\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=(\arcsin x)^{m-1}(\arccos x)^{n-1}$$

$$\times\frac{m\arccos x-n\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

【例 6】 $[\ln(xe^x)]' = (\ln x + x)' = \dfrac{1}{x} + 1.$

九

## 习 题 三

1. 求下列函数的导数:

(1) $y = \dfrac{x}{4^x}$; (2) $y = x \cdot 10^x$;

(3) $y = e^{\sqrt{x+1}}$; (4) $y = \sqrt{1+e^x}$;

(5) $y = 3^{\sin x}$; (6) $y = -\csc^2(e^{3x})$;

(7) $y = e^{-x} \cdot \cos 3x$; (8) $y = x \cdot e^x \cdot (\sin x + \cos x)$;

(9) $y = \arccos \dfrac{2}{x}$; (10) $y = \arccos \sqrt{1-3x}$;

(11) $y = (\arcsin x)^2$; (12) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;

(13) $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$; (14) $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$;

(15) $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; (16) $y = \operatorname{th}(\ln x)$;

(17) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$; (18) $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;

(19) $y = \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x}$; (20) $y = x \arcsin(\ln x)$.

2. 利用 $\dfrac{a^x - 1}{x} \to \ln a$, 直接证明 $(a^x)' = a^x \ln a$.

3. 求导数:

(1) $\left(\arccos \dfrac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)'$;

[提示: 令 $x = \operatorname{ctg} \alpha$.]

(2) $\left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$;

(3) $\left(\operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right)'$;

[提示: 令 $x = \operatorname{tg} \alpha$.]

(4) $(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x))'$.

4. 对于 $\sqrt{1-x^2}$, 求 $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$ 的导数.

## 第四节　隐函数的导数

### 4.1 隐函数

变数多于一个的方程，也可以决定函数．例如在椭圆方程

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{4.1}$$

里，随便令 $x$ 等于某个数 $x_0$，就变成了以 $y$ 为未知数的方程

$$b^2x_0^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{4.2}$$

只要 $|x_0|\leqslant a$，(4.2)便有确定的根

$$y=\pm b\sqrt{a^2-x_0^2}/a. \tag{4.3}$$

如果用这根当作对应于 $x_0$ 的值 $y_0$，便在 $x$ 与 $y$ 之间建立了对应关系，于是 $y$ 是 $x$ 的函数．这和以前用等式

$$y=f(x) \tag{4.4}$$

定义的函数不同．这里给定了 $x=x_0$，只要把 $x_0$ 代入 $f(x)$，立即得到函数的对应值 $f(x_0)$．但是把 $x_0$ 代入 (4.1) 之后得到 (4.2)，不能马上告诉我们 $y$ 应该是什么数值．还需要从(4.2)求得(4.3)．然后才能说

$$y_0=\pm b\sqrt{a^2-x_0^2}/a.$$

如果希望能象(4.4) 那样方便地求出 $x_0$ 的对应值，就需要先从(4.1)解 $y$，得到

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad -a\leqslant x\leqslant a \tag{4.5}$$

才行．然而不要以为每有一个方程 $F(x, y)=0$，便能解出来一个函数 $y=f(x)$(即便它确实存在)．这一步工作未必容易，有时根本办不到．例如由

$$x^3+y^3=3axy \tag{4.6}$$

解 $y$ 就很麻烦．由

$$xy-e^{x}+e^{y}=0 \tag{4.7}$$

解 $y$ 就不是我们现有的知识所能作到的. 虽然不能解 $y$, 可是满足方程的一组一组的数一般却是存在的. 借这种数组建立对应关系是可以做到的. 所以又有一类不用自变量的算式明白表示,而借满足方程的数组来规定的函数.

**定义 1** 假定一个方程里的变量多于一个, 若把其中一个认作因变量,其余变量认作自变量,且(一)不把因变量从方程解出来; (二)用满足方程的数组建立变量之间的对应关系. 就把这对应关系称为这方程确定的*隐函数*.

相对地说,以前讲的象(4.4)那样的函数,便称为*显函数*. 隐函数不能脱离确定它的方程,一旦从方程解出它之后,就是显函数了. 例如(4.5)是显函数, 它就是暗含在(4.1)里的隐函数. (4.6)和(4.7)也暗含着隐函数, 但是不知道 $y$ 应该怎样用 $x$ 来表示.

一个方程决定的隐函数,往往不止一个. 例如(4.1)决定(4.5)里的两个函数. (4.4)的反函数也可以说是在方程

$$f(x)-y=0$$

中认为 $y$ 是自变量、$x$ 是因变量而确定的隐函数.

方程的变数多于两个时, 把一个看作因变量, 其余的(不少于两个)看作自变量,所确定的隐函数是多元函数.

## 4.2 隐函数的导数

给定了方程

$$F(x,\ y)=0 \tag{4.8}$$

之后,究竟 $F(x, y)$ 必须具备什么条件, 才可以确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数,以及这函数有无导数,不是本书所要讨论的问题. 我们假定(4.8)能确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数, 而且 $F(x, y)$ 对于 $x$ 和

$y$ 都有连续的导数．下面只用几个例题说明这导数的求法．

【例 1】 认为方程(4.1)确定了 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $y$ 对于 $x$ 的导数．

解：这里实际有两个隐函数，把其中一个记作 $y(x)$，(4.1)就变作

$$b^2x^2+a^2[y(x)]^2=a^2b^2,$$

因为当 $x\in[-a, a]$时，一定能使这等式成立，所以这实际是恒等式．形式上左端是 $x$ 的函数，可以对 $x$ 求导数．现在将两端同时对 $x$ 求导数，得

$$2b^2x+2a^2y(x)y'(x)=0,$$

由此解 $y'(x)$，得

$$y'(x)=-\frac{b^2x}{a^2y(x)}.$$

一般来说，$y(x)$是不知道的，所以平常只写 $y$，它的导数也只写 $y'$：

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

这就是所求的导数．

读者可以从(4.5)按显函数求导数，把上边的结果核对一下．

【例 2】 假设(4.6)确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数，求它的导数．

解：将(4.6)两端对 $x$ 求导数，得

$$3x^2+3y^2y'=3a(xy'+y),$$

由此解得

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

【例 3】 (4.7)确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $y'$．

解：将(4.7)两端同时对 $x$ 求导数，得

$$y+xy'-e^x+e^yy'=0,$$

$$y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

从以上三个例题来看，求隐函数的导数，只需将确定隐函数的方程的两端同时对自变量 $x$ 求导数，凡遇到含有因变量 $y$ 的项时，把 $y$ 当作函数看待，按复合函数求导数。然后从所得等式解出 $y'$ 来。在 $y'$ 的表示式里，一般含有 $x$ 和 $y$，不能只由 $x$ 表示。

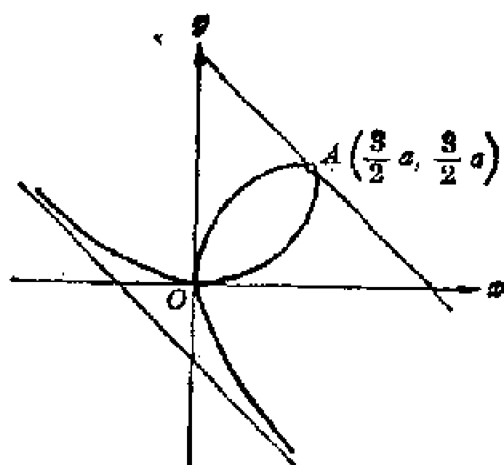



图 4-13

从隐函数求得的导数，仍是切线的斜率。例如蔓叶线(4.6)的环部(图 4-13)的顶点是 $A\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$，在这点的导数是

$$y'_A=\frac{a\left(\frac{3a}{2}\right)-\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-a\left(\frac{3a}{2}\right)}=-1,$$

而这点上的切线的斜角是 135°。

如果认为 $y=f(x)$ 的矫形反函数 $y=\varphi(x)$ 是由方程 $x=f(y)$ 确定的隐函数，按隐函数求 $\varphi'(x)$ 所得的结果和§3.1中的一样。

【例 4】 假设 $P(x_1, y_1)$ 是圆锥曲线

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

上的一点。求通过 $P$ 点的切线的方程。

解：假定所给曲线方程确定了 $y$ 是 $x$ 的函数，这函数的导数便是切线的斜率。将所给方程对于 $x$ 求导数，得

$$2Ax+By+D+(Bx+2Cy+E)y'=0,$$

$$y'=-\frac{2Ax+By+D}{Bx+2Cy+E}.$$

那么曲线在 $P$ 点的斜率是

$$m=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E},$$

所求切线的方程是

$$y-y_1=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}(x-x_1),$$

展开合并，得

$$2Ax_1x+B(x_1y+xy_1)+2Cy_1y+Dx+Ey$$
$$-(2Ax_1^2+2Bx_1y_1+2Cy_1^2+Dx_1+Ey_1)=0.$$

由于 $P$ 在曲线上，那么

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

从而

$$2Ax_1^2+2Bx_1y_1+2Cy_1^2+Dx_1+Ey_1$$
$$=-Dx_1-Ey_1-2F.$$

代入上面的等式，得

$$2Ax_1x+B(x_1y+xy_1)+2Cy_1y$$
$$+D(x+x_1)+E(y+y_1)+2F=0,$$

或者
$$Ax_1x+B\frac{x_1y+xy_1}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}$$
$$+E\frac{y+y_1}{2}+F=0.$$

这就是所求的切线公式.

## 4.3 对数求导法

若一个函数是许多函数的乘积，或者函数的方指数又是函数时，利用对数的性质，可以使计算简便.

【例 1】 求 $y=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$ 的导数.

解: 由所给等式取对数，得

$\ln y=\ln(x+1)+\ln(x-3)-\ln(x+3)-\ln(x-1)$.

然后按隐函数求 $y'$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot y'&=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}\\&=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\\&=\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{2}{(x-3)(x-1)}\\&=\frac{4(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2-9)}\\y'&=\frac{4(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2-9)}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{4(x^2+3)}{(x+3)^2(x-1)^2}.\end{aligned}$$

【例 2】 设 $y=(\sin x)^x$，求它的导数.

解: 由原式取对数

$$\ln y=x\ln\sin x.$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x$$

于是

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x).$$

关于例 2 有一个一般的公式

$$(u^v)'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}u', \qquad (4.9)$$

假设 $y=u^v$，取对数，得

$$\ln y=v\cdot\ln u,$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}.$$

所以 $$y'=u^v\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)$$
$$=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.$$
如果这里 $u$ 是常数，$y$ 就是指数函数，$u'=0$，公式变为
$$y'=u^v\ln u\cdot v',$$
恰好是指数函数的导数公式．如果 $v$ 是常数，$y$ 就是幂函数，$v'=0$，公式变为
$$y'=vu^{v-1}u',$$
恰好是幂函数的导数公式．所以从形式上说，(4.9)是指数函数与幂函数的导数合并成的．

【例 3】 求 $y=(\operatorname{tg}x)^x+x^{\operatorname{tg}x}$ 的导数．

解：这当然不能直接用对数来解，但是把这函数的两项分开，都可以用公式(4.9)求导数：

令 $u=(\operatorname{tg}x)^x$，则
$$u'=(\operatorname{tg}x)^x\ln\operatorname{tg}x+x(\operatorname{tg}x)^{x-1}\sec^2x;$$
令 $v=x^{\operatorname{tg}x}$，则
$$v'=x^{\operatorname{tg}x}(\ln x)\sec^2x+\operatorname{tg}x\cdot x^{\operatorname{tg}x-1}.$$
由此 $$y'=(\operatorname{tg}x)^x\ln\operatorname{tg}x+x(\operatorname{tg}x)^{x-1}\sec^2x$$
$$+x^{\operatorname{tg}x}(\ln x)\sec^2x+\operatorname{tg}x\cdot x^{\operatorname{tg}x-1}.$$

## 4.4 参数方程之下的导数

曲线的方程
$$F(x,\ y)=0 \tag{4.10}$$
如果能用参数 $t$ 分解为参数方程
$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}, \tag{4.11}$$
对于绘制曲线方便得多（数理化自学丛书《平面解析几何》）．

参数方程(4.11)和(4.10)一样地能确定隐函数. 只要 $t$ 取一个(可以取的)值, $x$ 与 $y$ 便各有一值与之对应, 于是 $x$ 与 $y$ 的值可以借 $t$ 的值而互相对应, 这就建立了函数关系. (4.11)里 $x$ 与 $y$ 的变化都以 $t$ 为枢纽, 本来不分先后, 究竟谁该是自变量呢? 这和(4.10)的情形一样, 要由我们选择. 若认为 $y$ 因 $x$ 而变, 就需要先认为 $t$ 因 $x$ 而变, 然后 $y$ 因 $t$ 而变, 即是需要用 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\chi(x)$ 与 $y=\psi(t)$ 组成复合函数

$$y=\psi[\chi(x)].$$

所以这函数的导数可以根据§3.1定理1及§2.4定理5推导出来:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (4.12)$$

可见由参数方程确定了函数而求这函数的导数时, 只需求参数方程里的两个函数对于参数的导数之比.

建议读者再从增量之比的极限直接证明(4.12)作为练习.

显函数是(4.11)里当 $\varphi(t)=t$ 时, 即是当 $t=x$ 时的特别情形. 这时 $\varphi'(t)=1$, 而(4.12)变为

$$\frac{dy}{dx}=\psi'(t)=\psi'(x).$$

在(4.11)里 $x$ 与 $y$ 的地位是平等的, 所以同样可以求 $x$ 对于 $y$ 的导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

【例 1】 椭圆(4.1)的参数方程是

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\theta \\ y&=b\sin\theta \end{aligned}\right\},$$

从这参数方程求曲线的斜率，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta.$$

$\theta$ 经历$[0, 2\pi)$间的一切值时，这导数便给出椭圆上一切点的斜率．按隐函数求得的斜率(§ 4.2) $-\frac{b^2x}{a^2y}$，需要知道两个坐标才能求得它的数值．按显函数求斜率(§ 4.1)，需要从两个公式

$$y'=\mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

中选择一个使用．这两种情形都不如参数方程的情形方便．

【例 2】 蔓叶线(4.6)的参数方程是

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{3at}{1+t^3} \\ y&=\frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\},$$

由此求 $y$ 对于 $x$ 的导数：

$$\frac{dx}{dt}=3a\frac{(1+t^3)-t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=3a\frac{(1+t^3)\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

曲线上对应于 $t=\frac{1}{2}$ 的点是 $B\left(\frac{4a}{3}, \frac{2}{3}a\right)$．当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}$．所以在 $B$ 点的切线(图 4-14)是

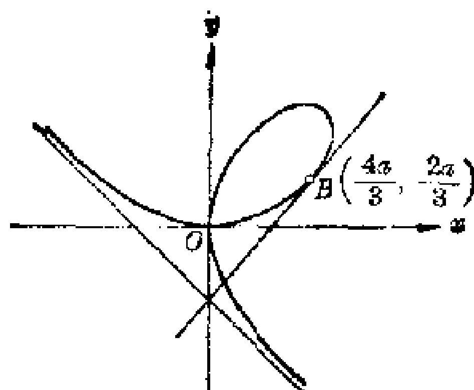


图 4-14

$$y-\frac{2a}{3}=\frac{5}{4}\left(x-\frac{4a}{3}\right),$$

化简得

$$5x-4y-4a=0.$$

## 习 题 四

1. 下列方程确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数，求它的导数：

   (1) $y^3+3y=x$;  (2) $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

2. 由下列参数方程求 $\frac{dy}{dx}$:

   (1) $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$;

   (2) $x=a\sec t$, $y=b\,\mathrm{tg}\,t$ $(a>0,\ b>0)$;

   (3) $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=b\,\mathrm{sh}\,t$ $(a>0,\ b>0)$;

   (4) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$;

   (5) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$.

3. 利用对数求下列函数的导数：

   (1) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

   (2) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

   (3) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

4. 抛射体初速为 $v_0$, 抛射角为 $\alpha$, 以时间 $t$ 为参数时，运动方程为

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

求 $t=t_0$ 时，(1)物体沿水平与铅直方向的分速度；(2)速度的方向和大小；(3)水平与铅直方向的分加速度．

## 第五节　微　　分

### 5.1　微分与增量

假设 $y=f(x)$ 是某区间上的连续函数，那么它在这区间里某一点 $x$ 上的增量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

一定随着 $\Delta x\to 0$ 而趋于零．假若 $f(x)$ 是一次函数 $y=ax+b$，那么不论 $x$ 与 $\Delta x$ 各取什么数值，$\Delta y$ 永远是 $\Delta x$ 的线性(齐次)函数

$$\Delta y=a\Delta x,$$

$a$ 与 $\Delta x$ 无关．每当 $\Delta x$ 取定了一个数值，计算 $\Delta y$ 之值非常方便．一般函数，即使在固定的一点，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之值因 $\Delta x$ 而不同，这时计算 $\Delta y$ 之值，就不象一次函数那样方便了．然而实用上非常需要有一种方法，象一次函数那样，能够简单地计算 $\Delta y$ 的近似值．关于这问题有些情形是容易解决的．例如自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$，当时间 $t$ 取增量 $\Delta t$ 时，

$$\Delta s=gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

$\Delta t\to 0$ 时，$\Delta s$ 是无穷小，其中第一项 $gt\Delta t$ 是 $\Delta t$ 的同阶无穷小，而第二项 $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ 是 $\Delta t$ 的高阶无穷小，它比起第一项来要小得多．所以 $gt\Delta t$ 在 $\Delta s$ 之中是主要部分，而 $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ 则无足轻重．为了简化 $\Delta s$ 的计算，略去 $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ 不会发生本质

的影响．剩下的 $gt\Delta t$ 是 $\Delta t$ 的线性(齐次)函数，用它近似地表示 $\Delta s$ 之值，就和一次函数有类似的方便了．$gt$ 因 $t$ 而不同，只这一点比一次函数复杂一些．

同样的问题对于正弦函数 $y=\sin x$ 便有些麻烦了，当 $x$ 取增量 $\Delta x$ 时，

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= \sin(x+\Delta x)-\sin x \\
&= 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.
\end{aligned}
$$

这 $\Delta y$ 的结构没有明显地把 $\Delta x$ 的同阶无穷小与高阶无穷小分开．于是不能从这里直接摘出 $\Delta y$ 的线性主要部分来作为 $\Delta y$ 的近似值．如果在前面 $\Delta s$ 的近似值 $gt\Delta t$ 里注意到 $gt$ 是 $s$ 的导数(因此理解到运动速度与时间 $\Delta t$ 的乘积，近似地等于 $s$ 的增量)，类似地来看 $y=\sin x$ 的增量，自然应该近似地等于

$$
(\sin x)'\Delta x=\cos x\cdot\Delta x.
$$

将这关系再从理论上分析一下：

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\Rightarrow\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\cos x\text{ 是无穷小.}
$$

那么 $\Delta y=\cos x\Delta x+\alpha\Delta x$ 里的 $\alpha\Delta x$ 是 $\Delta x$ 的高阶无穷小，$\cos x\cdot\Delta x$ 是 $\Delta x$ 的同阶无穷小(只要 $\cos x\neq 0$)，可见用 $\cos x\cdot\Delta x$ 作为 $\Delta y$ 的近似值是理所当然的．

也不是说凡连续函数的增量都有这样一个方便的近似公式．例如 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在原点连续，在原点的邻域里

$$
\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x},
$$

$\Delta x$ 的系数 $\sin\frac{1}{\Delta x}$ 不能稳定在一个与 $\Delta x$ 无关的数 $A$ 上；不论 $A$ 是什么数，$\Delta y-A\Delta x=\left(\sin\frac{1}{\Delta x}-A\right)\Delta x$ 都不是 $\Delta x$ 的高阶

无穷小，所以在原点没有一个方便的公式表示 $\Delta y$.

**定义 1** 函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y$ 里，形式为 $A\Delta x$ 的部分叫做函数的微分；其中 $A$ 是与 $\Delta x$ 无关的数．在一点的微分存在时，就说函数在这一点可微.

微分的记号是 $dy$ 或 $df(x)$．这里 $d$ 和 $\Delta y$、$\Delta f(x)$ 里的 $\Delta$ 一样，不是一个数，$dy$ 也绝无乘积的意义．上边几个函数讨论的结果，是

$$y=ax+b \text{ 时}, \quad dy=d(ax+b)=a\Delta x,$$

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \text{ 时}, \quad ds=d\left(\frac{1}{2}gt^2\right)=gt\Delta t,$$

$$y=\sin x \text{ 时}, \quad dy=d(\sin x)=\cos x\cdot\Delta x,$$

$$y=x\sin\frac{1}{x} \text{ 时，在原点不可微.}$$

**定理 1** 函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 点可微，必然且只需它在 $x$ 点有导数 $y'=f'(x)$，而且

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{5.1}$$

【证】 设 $y=f(x)$ 在 $x$ 点可微，那么有一个与 $\Delta x$ 无关的数 $A$，使得 $\Delta y-A\Delta x$ 是 $\Delta x$ 的高阶无穷小，把它记作 $\alpha$，则

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{\alpha}{\Delta x}.$$

由于 $\alpha$ 是 $\Delta x$ 的高阶无穷小，$\frac{\alpha}{\Delta x}\to 0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=A.$$

这是说 $f(x)$ 在 $x$ 点有导数 $f'(x)$.

假设 $f'(x)$ 存在，即是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$．这表示

$$\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

是无穷小，由此

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha_1 \Delta x$$

右端第二项是 $\Delta x$ 的高阶无穷小；所以第一项是 $\Delta y$ 的线性主要部分，因而是 $f(x)$ 的微分．】

**附注** 从这定理来看，函数的可导与可微是一致的，有导数必有微分，无导数也就没有微分，所以可导与可微不必严格区分．有些书把求导数也说是进行微分．

若将(5.1)用于特别的函数 $f(x)=x$，则

$$df(x) = dx, \quad f'(x) = 1.$$

(5.1)变为

$$dx = df(x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

这是说自变量的增量就是自变量的微分，因此(5.1)总是写作

$$dy = f'(x)dx. \tag{5.2}$$

于是有

**定理 2** 函数在一点的微分，等于函数在这点的导数与自变量的微分的乘积．

(5.2)的右端有两个变量，一个是 $x$，一个是 $dx$．两者的变化各不相干．$dy$ 的这个表达式具有两个性质：第一，它是 $dx$ 的线性(齐次)函数，所以容易计算；第二，它与 $\Delta y$ 之差是 $dx$ 的高阶无穷小，所以这个近似值可靠．

(5.2)右端里 $f'(x)$ 是自变量微分 $dx$ 的系数，所以导数又叫做*微系数*．

## 5.2 微分的几何意义

假设 $M(x, y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点(图 4-15)，$MT$

是切线，这切线的斜率便是 $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$. 令 $M$ 的横坐标 $x$ 取增量 $\Delta x$, 曲线在 $M$ 点的纵坐标得到相应的增量 $\Delta y=NM_1$, 同时切线 $MT$ 在 $M$ 点的纵坐标得到增量 $NK$. 因为

$$MN=\Delta x=dx,$$

从直角三角形 $MNK$, 显见

$$NK=\operatorname{tg}\alpha\Delta x=f'(x)dx=dy.$$

所以函数 $y=f(x)$ 的微分等于它的图象在 $(x, f(x))$ 点的切线的纵坐标的增量，进而

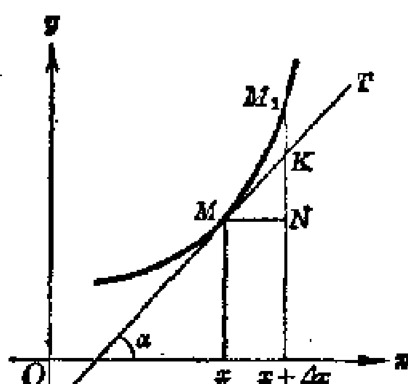


图 4-15

$$KM_1=NM_1-NK=\Delta y-dy$$

是函数增量与微分所差的那个高阶无穷小. 从图形上直观地来看，$KM_1$ 夹在曲线与切线之间，当 $\Delta x\to 0$ 时，它比 $NK$ 缩短得快得多.

在微分的这种解释之下，§5.1 定义的 $dx$、$dy$ 就是切线的方向数，当 $x$ 一定时，$dx$、$dy$ 都是变数(无穷小)，然而它们的比值却不变，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

所以函数的导数等于函数的微分除以自变量的微分之商，由于这个原因，导数又叫做微商，给它取 $\frac{dy}{dx}$ 这样的记号，意义可以双关.

这样解释导数有很多方便，许多关于导数的运算可以按分数的运算作形式的变换. 例如复合函数的导数公式(§2.4)写作

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

可以说是在右端按分数的性质约去 $du$ 就得到左端. 又如反

函数的导数公式(§3.1)写作

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

也和分数变形的方法一致。

## 5.3 初等函数的微分

根据定理1，任何函数的微分，只要存在的话，都可以按公式(5.2)直接写出来．例如基本初等函数的微分有

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx,$$

$$d(\cos x)=-\sin x\,dx,$$

$$d(\operatorname{tg} x)=\sec^2 x\,dx,$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx,$$

$$d(\ln x)=\frac{dx}{x},$$

$$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

等等，其他就不一一列举了．

在四则运算方面则有下列公式，都很容易证明．

$$d(u+v)=du+dv,$$

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

关于复合函数的微分，有一点特性，有必要着重提一下：假设

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x),$$

那么

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x),$$

所以 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$．然而 $\varphi'(x)dx=du$，所以

$$dy = f'(u)\,du.$$

这俨然是函数 $y$ 对于 $u$ 的微分，于是有

**定理 3** 在函数 $y=f(u)$ 里，不论 $u$ 是自变量还是复合函数的中间变量，这函数的微分都永远可以照微分定义的形式写．

这就是更换自变量时，微分形式的不变性．例如 $u$ 是 $x$ 的函数时，

$$d(\sin u) = \cos u\,du.$$

反过来也可以说，在 $d(\sin x) = \cos x\,dx$ 里，把自变量 $x$ 换作 $t$ 的函数 $u$ ($dx$ 换作 $du$)，便是上面的复合函数的微分公式．从而可以从 §3.4 里的导数公式直接写出微分公式来．即是

$$d(u+v) = du + dv,$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d(Cu) = C\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

$$d(u^n) = nu^{n-1}du,$$

$$d(a^u) = a^u \ln a\,du,$$

$$d(e^u) = e^u\,du,$$

$$d(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,du = \frac{du}{u\ln a},$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u},$$

$$d(\sin u) = \cos u\,du,$$

$$d(\cos u) = -\sin u\,du,$$

$$d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u} = \sec^2 u\,du,$$

$$d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u} = -\csc^2 u\,du,$$

$$d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$d(\operatorname{arc\,tg} u)=\frac{du}{1+u^2},$$

$$d(\operatorname{arc\,ctg} u)=-\frac{du}{1+u^2}.$$

【例 1】 计算 $y=e^{-ax}\sin bx$ 的微分.

解: $d(e^{-ax}\sin bx)=\sin bx\,d(e^{-ax})+e^{-ax}d(\sin bx)$

$$=\sin bx e^{-ax}d(-ax)+e^{-ax}\cos bx\,d(bx)$$

$$=-ae^{-ax}\sin bx\,dx+be^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx.$$

【例 2】 求 $y=\operatorname{th}x$ 的微分.

解: $d(\operatorname{th}x)=d\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)=\frac{\operatorname{ch}x\,d(\operatorname{sh}x)-\operatorname{sh}x\,d(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{ch}^2x}$

$$=\frac{\operatorname{ch}^2x\,dx-\operatorname{sh}^2x\,dx}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}.$$

【例 3】 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的微分.

解: $dy=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}d(x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

## 5.4 实际中的微分现象

在物质世界的变化现象中,几乎都寓有微分的意义,因而都可以借微分的理论来解决.

【例 1】 边长为 $x$ 的正方形的面积 $A$，当 $x$ 伸缩很少的一点点 $dx$ 时，$A$ 的改变量近似地等于 $dA=2x\cdot dx$. 这说明当 $dx>0$ 时 $(2x\,dx>0)$，$A$ 改变的大小大约等于正方形(图 4-16)之外靠着横竖两边的两个小长条(带阴影线的部分)的面积. 两小条交叉处的小正方形略去未计. 当 $dx<0$ 时 $(2x\,dx<0)$，$A$ 的改变也是这样多，不过这时减少了两小条的面积，而且多减了两小条交叉处的一个小正方形的面积.

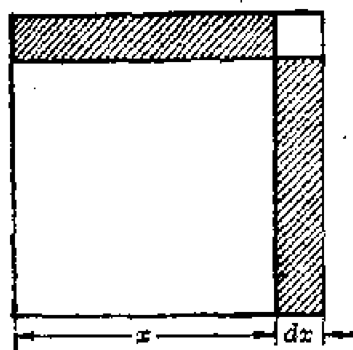



图 4-16

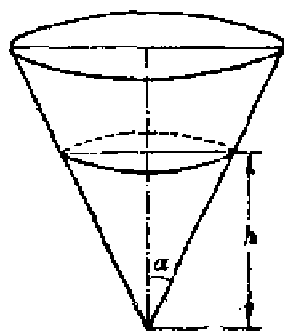



图 4-17

【例 2】 顶角为 $2\alpha$ 的正圆锥形容器(图 4-17)，装着一公升水. 如果这时再添 10 毫升水，水面大约升高多少？

解：假设水深是 $h$，那么水面半径是 $r=h\cdot\operatorname{tg}\alpha$，水的体积是

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\alpha\cdot h^3. \qquad (5.3)$$

现在 $V=1000$ 毫升，那么

$$h=10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

将(5.3)微分，得

$$dV=\pi\operatorname{tg}^2\alpha\,h^2\,dh.$$

现在 $dV=10$，那么

$$10=\pi\operatorname{tg}^2\alpha\cdot 100\left(\frac{3}{\pi\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}dh=100\sqrt[3]{9}\ (\pi\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{1}{3}}\,dh,$$

$$dh = (10\sqrt[3]{9\pi \operatorname{tg}^2\alpha})^{-1}.$$

所以水面大约升高$(10\sqrt[3]{9\pi \operatorname{tg}^2\alpha})^{-1}$公分.

注意，这里$dV=\pi r^2 dh$实际等于原来的水面面积乘以增加的水深，也就是说等于一个小圆柱的体积，这圆柱以原来的水面为底，以$dh$为高. 许多体积的微分都可以这样理解.

## 5.5 微分的应用

函数的增量一般不易计算，而初等函数的导数都容易计算，所以微分是估计函数增量的有力工具. 在§5.2说过，$dy$是在$x$点的切线纵坐标的增量，用$dy$代替$\Delta y$就是在$x$的小邻域里用切线代替曲线. 利用微分的这点性质，可以求函数的近似值及估计近似值的误差. 以下就从这两方面阐述一下微分在近似计算中的应用.

1. 求近似值

若已知$f(x_0)$，$f'(x_0)$和$x_0$的增量$\Delta x$，便可以从

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \tag{5.4}$$

求$f(x_0+\Delta x)$的近似值.

【例1】 函数$y=\sqrt[n]{1+x}$的微分是

$$dy = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+x}dx,$$

代入(5.4)，令$\Delta x=h$，得近似公式

$$\sqrt[n]{1+(x+h)} \approx \sqrt[n]{1+x}+\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+x}h,$$

令$x=0$，就得到

$$\sqrt[n]{1+h} \approx 1+\frac{1}{n}h.$$

比如为了求$\sqrt[5]{270}$的近似值，可以按这公式进行如下：

$$\sqrt[5]{270}=\sqrt[5]{243+27}=3\sqrt[5]{1+\frac{1}{9}}$$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right)\approx 3.067.$$

【例 2】 因为 $y=\sin x$ 的微分是 $dy=\cos x\,dx$, 所以

$$\sin(x+h)\approx\sin x+h\cos x. \tag{5.5}$$

在这近似公式里, $x$ 和 $h$ 都必须用弧度作单位.

比如求 $\sin 31°$, 可以借 $\sin 30°$ 与 $\cos 30°$ 计算.

$$30°=\frac{\pi}{6}, \qquad 1°=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745.$$

将这些代入(5.5)得

$$\sin 31°\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.01745$$

$$\approx 0.5151.$$

$\sin 31°$若取五位可靠的近似值,应是 0.51504,比 0.5151 略小一点,读者可想一想其中的原因.

当$|h|$很小时, $\sin h\approx h$, 这是 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ 的推论. 也可以说是(5.5)在 $x=0$ 时的特例.

【例 3】 若函数为 $y=\ln x$, 则 $dy=\frac{dx}{x}$, 于是

$$\ln(x+h)\approx\ln x+\frac{h}{x}.$$

设已知 $\ln 781\approx 6.66058$, 根据这公式知道

$$\ln 782\approx 6.66058+\frac{1}{781}\approx 6.66186,$$

而五位自然对数表里 $\ln 782=6.66185$. 所以这里的结果误差很小.

2．估计误差

如果 $f(x)$ 可微，当 $|\Delta x|$ 很小时，$|f(x+\Delta x)-f(x)|$ 也很小，可以取 $f(x)$ 作为 $f(x+\Delta x)$ 的近似值，这时候必须考虑所引起的误差(绝对值，最大的)；有时是先限定 $f(x)$ 代替 $f(x+\Delta x)$ 时的误差(绝对值)不许超过某个 $\varepsilon$，然后探求 $|\Delta x|$ 不得超过怎样限度的 $\delta$．这两个问题都可以借微分解决．

显然，在第一个问题里，用 $f(x)$ 代替 $f(x+\Delta x)$ 所引起的绝对误差是 $|\Delta y|\approx|f'(x)\Delta x|$ 或 $|dy|=|f'(x)dx|$；在第二个问题里，限定了 $|\Delta y|\leqslant\varepsilon$，可以由

$$|f'(x)||\Delta x|\leqslant|f'(x)|\delta=\varepsilon$$

来决定 $\delta$，

$$\delta=\frac{\varepsilon}{|f'(x)|}.$$

相对误差是绝对误差 $\varepsilon$ 与 $|f(x)|$ 之比：

$$\frac{\varepsilon}{|f(x)|}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta=\left|\frac{d}{dx}\ln f(x)\right|\delta.$$

所以相对误差等于函数的对数的导数的绝对值与自变量误差的乘积，相对误差通常用百分数表示．

【例 4】 已知直角三角形的斜边是 $c$，它的一个锐角的近似值为 $\alpha$，$\alpha$ 的精密度为 $\delta$，也就是 $\alpha$ 的最大绝对误差是 $\delta$．若用这些数据计算三角形的其他两边，问所得结果的相对误差是多大？

解：设 $\alpha$ 的误差为 $\Delta\alpha$，$|\Delta\alpha|<\delta$，再设 $\alpha$ 角的对边是 $a$，邻边是 $b$，那么

$$a=c\cdot\sin\alpha,\quad b=c\cdot\cos\alpha.$$

由此
$$\left|\frac{da}{a}\right|=\operatorname{ctg}\alpha|\Delta\alpha|<\delta\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\left|\frac{db}{b}\right|=\operatorname{tg}\alpha|\Delta\alpha|<\delta\operatorname{tg}\alpha.$$

如果 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，那么 $0<\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{ctg}\alpha$，$a<b$. 上面的结果表明短边的相对误差较大，长边的相对误差较小. 在 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，也是这样.

【例 5】 $n$ 位常用对数表里所列的对数，末位数码都是经过四舍五入来的，所以对数的精密度是 $1/(2\cdot10^n)$. 用这对数表时，需要把真数取得精密到什么程度（即误差不超过什么限度），才能使它的对数保持这对数表的精密度（误差不突破 $1/(2\cdot10^n)$）？

解：函数 $y=\lg x$ 的微分是

$$dy=\frac{M}{x}\Delta x\approx\frac{0.4343}{x}\Delta x.$$

所以

$$|dy|<\frac{1}{2x}|\Delta x|.$$

现在要求 $|dy|\leqslant\frac{1}{2\cdot10^n}$，那么只要

$$\frac{1}{2x}|\Delta x|\leqslant\frac{1}{2\cdot10^n}$$

即可，也就是要 $x$ 的相对误差不超过 $\frac{1}{10^n}$，

$$\frac{|\Delta x|}{x}\leqslant\frac{1}{10^n},$$

或者说 $x$ 的误差 $|\Delta x|$ 不超过 $\frac{x}{10^n}$. $x$ 是 $n$ 位数，$\frac{x}{10^n}<1$. 这就是说，$x$ 的误差不能影响 $x$ 的最末位，即是 $n$ 位全要正确.

真数若不是前 $n$ 位有效数字都正确，那么使用 $n$ 位对数表计算反而有害.

## 习 题 五

1. 半径为 $r$ 的圆,当半径改变 $\Delta r$ 时,面积 $S$ 的改变量 $\Delta S$ 是多少? 求 $dS$.
2. 计算函数 $u=e^{-t}$ 在 $t=0$ 时的微分,并求曲线在(0, 1)点的切线.
3. 下列(a),(b),(c),(d) 四图的曲线是函数 $y=f(x)$ 的图象. $x$ 是 $f(x)$的定义域上的一点, $\Delta x$ 是 $x$ 的增量. 试标出 $f(x)$在 $x$ 点的增量$\Delta y$ 和微分 $dy$, 并说明它们的正负.

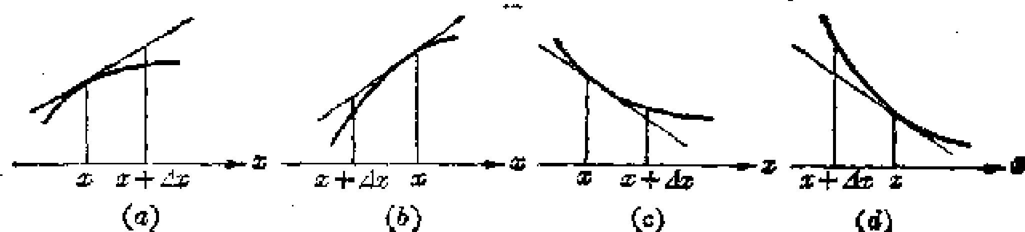



图 4-18

4. 在下列各等式的括弧里填上适当的函数:

(1) $d(\quad)=\dfrac{dx}{x}$;　　(2) $d(\quad)=e^{x}dx$;

(3) $d(\quad)=\cos x\,dx$;　　(4) $d(\quad)=\sin x\,dx$;

(5) $d(\quad)=\dfrac{dx}{1+x^2}$;　　(6) $d(\quad)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $d(\quad)=a\,dx$;　　(8) $d(\quad)=3x^2\,dx$;

(9) $d(\quad)=\sqrt{x}\,dx$;　　(10) $d(\quad)=e^{2x}\,dx$;

(11) $d(\quad)=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$;　　(12) $d(\quad)=e^{-x}\,dx$;

(13) $d(\quad)=\dfrac{dx}{2x}$;　　(14) $d(\quad)=\sin 2x\,dx$.

5. 求下列函数的微分:

(1) $y=\dfrac{2}{x^2}$;

(2) $y=(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$;

(3) $y=(1+x-x^2)^3$;　　(4) $y=\operatorname{tg}^2 x$;

(5) $y=\frac{\cos x}{1-x^2}$;　　　(6) $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

(7) $y=e^x\sin^2 x$;　　　(8) $y=x^{5x}$;

(9) $y=\operatorname{ch} 3x$;　　　(10) $y=\operatorname{arc\,tg} e^x$.

6. 求函数 $y=\operatorname{tg} x$ 当 $x$ 由 $45°$ 变到 $45°10'$ 时增量的近似值.

7. 求下列各数的近似值:

(1) $\sqrt[3]{1.02}$;　(2) $\lg 11$;

(3) $\sin 29°$.

8. 定圆内的弦 $AB$（图 4-19）平移很小一段距离 $h$ 时，弓形面积改变多少？

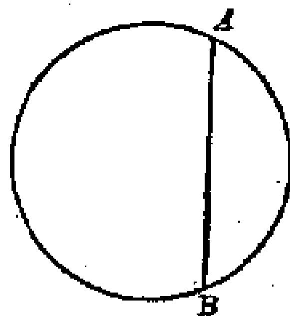


图 4-19

9. 当 $|x|$ 很小时，证明

(1) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$;　(2) $\operatorname{tg} x\approx x$.

10. 圆柱的高是 25 厘米，半径 $20\pm0.5$ 厘米. 求它的体积与侧面积的相对误差.

11. 球体积相对误差为 1%，由这体积求半径 $R$ 时，问其相对误差多大？

## 第六节　高阶导数与高阶微分

### 6.1　高阶导数

函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 一般又是某区间上的函数. 如果 $f'(x)$ 又有导数，便把这新的导数 $[f'(x)]'$ 叫做 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $y''$ 或 $f''(x)$：

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

同理 $f''(x)$ 的导数叫做 $f(x)$ 的三阶导数，记作 $y'''$ 或 $f'''(x)$. 一般来说：

**定义 1**　函数 $f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数. $n\geqslant 2$ 时的 $f^{(n)}(x)$ 都叫做 $f(x)$ 的高阶导数.

$n$ 阶导数的记号还有 $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, $D_x^{(n)}f(x)$.

为了名词统一，以前讲的导数 $f'(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一阶导数．$f(x)$ 本身有时也称为零阶导数．显然 $n+k$ 阶导数 $f^{(n+k)}(x)$ 是 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 的 $k$ 阶导数．

导数是函数的变率，所以 $f^{(n+1)}(x)$ 是 $f^{(n)}(x)$ 的变率．在物体的直线运动 $s=f(t)$ 里，$s'$ 是速度，$s''$ 是速度 $s'$ 的变率，即是加速度．

初等函数的导数，仍是初等函数．所以用以前讲的求导法能求初等函数的任何阶导数．

【例 1】 $y=2x^3+3x^2-1$, $y'=6x^2+6x$, $y''=12x+6$, $y'''=12$．$n\geqslant 4$ 时 $y^{(n)}=0$.

有些函数的各阶导数之间有固定的规律，这类规律应该记住．现举几例如下：

【例 2】 $y=x^n$, $y'=nx^{n-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-2}$, 凡当 $k<n$ 时，$y^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$.

$n$ 若是正整数，$y^{(n)}=n!$，$k>n$ 时，$y^{(k)}=0$.

【例 3】 $y=\sin(bx+c)$,

$$y'=b\cos(bx+c)=b\sin\left(bx+c+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=b^2\cos\left(bx+c+\frac{\pi}{2}\right)=b^2\sin(bx+c+\pi),$$

$$y^{(k)}=b^k\sin\left(bx+c+\frac{k\pi}{2}\right).$$

【例 4】 $y=e^{\alpha x}$, 则 $y^{(k)}=\alpha^k e^{\alpha x}=\alpha^k y$.

【例 5】 $y=\ln(1+x)$, $y'=\frac{1}{1+x}$,

$$y''=-\frac{1!}{(1+x)^2},\quad y'''=\frac{2!}{(1+x)^3},\cdots,$$

$$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\quad(k>1).$$

## 6.2 莱布尼兹公式

关于两函数之和 $u+v$，及常数与函数之积 $Cu$ 的高阶导数，都不难用数学归纳法证明：

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)};$$
$$(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}.$$

关于两函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 之积

$$y=uv$$

的 $n$ 阶导数，稍微麻烦一点．现在先实地推算两步．已知

$$y'=u'v+uv'.$$

继续微分 $$y''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

这两个结果和 $(u+v)^2$、$(u+v)^3$ 的展开式很相仿，只要把 $(u+v)^2$ 与 $(u+v)^3$ 展开式里 $u$、$v$ 的方指数换成导数的阶数，便是 $(u+v)''$ 与 $(u+v)'''$ 的展开式．这关系对于任何正整数 $n$ 都成立．

**定理** 若两函数 $u$、$v$ 都有 $n$ 阶导数，那么

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}. \tag{6.1}$$

这叫做莱布尼兹公式．

【证】 前面已知 $n=1$ 时，公式 (6.1) 成立．现在假定 $n=k$ 时，公式成立：

$$(uv)^{(k)}=u^{(k)}v+\cdots+C_k^\lambda u^{(k-\lambda)}v^{(\lambda)}+C_k^{\lambda+1}u^{(k-\lambda-1)}v^{(\lambda+1)}+\cdots+uv^{(k)}. \tag{6.2}$$

右端每项的导数都是两项的和，两项共用原来的系数，第一

项 $u$ 的导数升高一阶，$v$ 的导数不变，第二项 $u$ 的导数不变，$v$ 的导数升高一阶．比如

$$(C_k^\lambda u^{(k-\lambda)}v^{(\lambda)})' = C_k^\lambda u^{(k-\lambda+1)}v^{(\lambda)} + C_k^\lambda u^{(k-\lambda)}v^{(\lambda+1)},$$
$$(C_k^{\lambda+1}u^{(k-\lambda-1)}v^{(\lambda+1)})' = C_k^{\lambda+1}u^{(k-\lambda)}v^{(\lambda+1)} + C_k^{\lambda+1}u^{(k-\lambda-1)}v^{(\lambda+2)}.$$

前者右端第二项与后者右端第一项是同类的，合并在一起[*]，得

$$(C_k^\lambda + C_k^{\lambda+1})u^{(k-\lambda)}v^{(\lambda+1)} = C_{k+1}^{\lambda+1}u^{(\overline{k+1}-\overline{\lambda+1})}v^{(\lambda+1)}.$$

可见(6.2)式右端微分之后，合并同类项，得

$$(uv)^{(k+1)} = u^{k+1}v + C_{k+1}^1 u^{(k)}v' + \cdots + C_{k+1}^k u'v^{(k)} + uv^{(k+1)}.$$

这就是(6.1)在 $n=k+1$ 的情形．

所以(6.1)一旦在 $n=k$ 时成立，$n=k+1$ 时必然也成立．(6.1)就被证明了．▌

【例 1】 求 $y=x^2\sin x$ 的 10 阶导数．

解：令 $u=\sin x$，$v=x^2$．$v$ 的三阶及三阶以上的导数都是零，所以莱布尼兹公式里只有三项

$$\begin{aligned}
y^{(10)} &= (\sin x)^{(10)}(x^2) + C_{10}^1(\sin x)^{(9)}(x^2)' + C_{10}^2(\sin x)^{(8)}(x^2)'' \\
&= \sin(x+5\pi)\cdot x^2 + 10\sin\left(x+\frac{9\pi}{2}\right)\cdot 2x + 45\sin(x+4\pi)\cdot 2 \\
&= -x^2\sin x + 20x\cos x + 90\sin x \\
&= (90-x^2)\sin x + 20x\cos x.
\end{aligned}$$

【例 2】 求 $y=\dfrac{x^n}{1+x}$ 的 $n$ 阶导数．

---

[*] 数理化自学丛书，代数第四册，第一章 §1.9 有公式 $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$．

解：$y$ 是两个函数 $u=x^n$，$v=(1+x)^{-1}$ 的乘积。

$$u^{(n-k)}=n(n-1)\cdots(k+1)x^k,$$

$$v^{(k)}=\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

$$C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=(-1)^k n!C_n^k\frac{x^k}{(1+x)^{k+1}}.$$

代入莱布尼兹公式

$$y^{(n)}=n!\left[C_n^0\frac{1}{1+x}-C_n^1\frac{x}{(1+x)^2}+C_n^2\frac{x^2}{(1+x)^3}-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n C_n^n\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{n!}{1+x}\left[1-\frac{x}{1+x}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

如果不用莱布尼兹公式，还可以进行如下：

$$\frac{x^n}{1+x}=x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^n\frac{1}{1+x}.$$

所以

$$y^{(n)}=[x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}]^{(n)}+(-1)^n\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}$$

$$=0+(-1)^n\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}=\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

## 6.3 参数方程之下的高阶导数

当函数由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

给出时，$y$ 对于 $x$ 的导数(§4.4)是

$$y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{6.3}$$

求 $y$ 对于 $x$ 的二阶导数，就是求 $y'$ 对于 $x$ 的导数，应该将

$x=\varphi(t)$ 和(6.3)看作一组参数方程，再按 § 4.4 的方法求导数：

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (6.4)$$

如果求 $y$ 对于 $x$ 的三阶导数，又应该将 $x=\varphi(t)$ 与(6.4)看作一组参数方程，进行演算.

关于从参数方程求高阶导数没有很好的简便方法.

【例】 设 $x=t^2$, $y=t^3$, 求 $\frac{d^3y}{dx^3}$.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right)}{\frac{d}{dt}(t^2)}=\frac{\frac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4t}\right)}{\frac{d}{dt}(t^2)}=\frac{-\frac{3}{4t^2}}{2t}=-\frac{3}{8t^3}.$$

## 6.4 隐函数的高阶导数

假设方程

$$F(x,\ y)=0 \qquad (6.5)$$

能确定隐函数 $y(x)$. 从这方程求 $y^{(n)}(x)$，需要将(6.5)对 $x$ 求 $n$ 次导数，每次求导数必须记住 $y$ 和它的各阶导数都是 $x$ 的

函数. 从所得的 $n$ 个等式消去 $y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$, 然后解出 $y^{(n)}$ 来, 这便是所求的导数.

【例 1】 设由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6.6}$$

确定了 $y$ 是 $x$ 的函数. 求 $y''$.

解: 把(6.6)对于 $x$ 求两次导数:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}y'=0,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}y'^2+\frac{y}{b^2}y''=0.$$

从这两个等式消去 $y'$, 得

$$\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^4y^2}+\frac{y}{b^2}y''=0.$$

用 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 化简, 解 $y''$, 得

$$y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

读者可以由(6.6)解 $y$, 然后按显函数求两次导数, 将结果核对一下.

【例 2】 若方程

$$xy+e^y=0$$

确定 $y$ 为 $x$ 的隐函数, 求 $y''$.

解: 将所设方程对于 $x$ 求两次导数:

$$y+xy'+e^yy'=0, \tag{6.7}$$

$$2y'+xy''+e^yy'^2+e^yy''=0. \tag{6.8}$$

由(6.7)解得 $y'=-y/(e^y+x)$, 代入(6.8), 得

$$2\left(\frac{-y}{e^y+x}\right)+e^y\left(\frac{-y}{e^y+x}\right)^2+(e^y+x)y''=0.$$

由此

$$(e^y+x)y''=\frac{2y}{e^y+x}-\frac{e^y y^2}{(e^y+x)^2}=\frac{2xy-e^y(y^2-2y)}{(e^y+x)^2}.$$

所以
$$y''=\frac{2xy-e^y(y^2-2y)}{(e^y+x)^3}.$$

## 6.5 高阶微分

高阶微分的定义和高阶导数相仿．函数 $y=f(x)$ 的二阶微分是 $dy$ 的微分 $d(dy)$，记作 $d^2y$．二阶微分 $d^2y$ 的微分 $d(d^2y)$ 叫做 $f(x)$ 的三阶微分，记作 $d^3y$．

**定义 2** 函数 $y=f(x)$ 的 $n$ 阶微分 $d^ny$ 是 $n-1$ 阶微分 $d^{n-1}y$ 的微分 $d(d^{n-1}y)$．

若问 $d^2y$ 如何表示，应该回忆 $dy$ 的定义：$dy=f'(x)dx$．这是 $x$ 与 $dx$ 的函数，其中 $x$ 与 $dx$ 的变化各不相干．这函数的结构是一种固定形式：

（函数对于 $x$ 的导数）×（自变量 $x$ 的微分）．

所以 $d^2y=d(dy)$ 应该是：

（$dy$ 对于 $x$ 的导数）×（自变量 $x$ 的微分）．

但是 $(dy)'=[f'(x)dx]'=f''(x)dx$，所以

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

为了便于书写，通常把 $(dx)^2$ 写作 $dx^2$，那么二阶微分的写法便是：

$$d^2y=f''(x)dx^2$$

如此类推：$d^3y=f'''(x)dx^3$，$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$．这就是说：

> 函数的 $n$ 阶微分等于函数的 $n$ 阶导数与自变量微分的 $n$ 次幂的乘积．

为了名词统一，函数 $f(x)$ 的微分 $df(x)$，也叫做一阶微分．

【例 1】 因为 $y=\sin x$ 的 $n$ 阶导数是 $\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，那么

$$d^n y=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)dx^n.$$

凡微分都是无穷小，只要 $f^{(n)}(x)\neq 0$，那么 $d^n f(x)$ 便是 $dx$ 的 $n$ 阶无穷小，这因为 $d^n y$ 与 $dx^n$ 之比是与 $dx$ 无关的函数 $f^{(n)}(x)$：

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

这也说明 $n$ 阶导数为什么采用 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 作记号. 同时把高阶导数叫做高阶微商，也就很自然了.

复合函数的一阶微分的形式有不变性(§5.3)，但高阶微分没有这种优越性. 假设

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x).$$

则
$$dy=f'(u)du=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

按照二阶导数的定义 $d^2y=(dy)'dx$. 现在

$$\begin{aligned}(dy)'&=\{f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\}'\\&=\{f''[\varphi(x)][\varphi'(x)]^2+f'[\varphi(x)]\varphi''(x)\}dx.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}d^2y&=f''[\varphi(x)][\varphi'(x)]^2dx^2+f'[\varphi(x)]\varphi''(x)dx^2\\&=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.\end{aligned}$$

比起 $u$ 为自变量时的二阶微分 $f''(u)du^2$ 多了一项 $f'(u)d^2u$，其原因就是 $dy$ 中的 $du$ 不是常量而是 $x$ 的函数. 三阶微分的形式还要复杂些:

$$d^3y=f'''(u)du^3+3f''(u)du\,d^2u+f'(u)d^3u.$$

若将上边求得的 $d^2y$, $d^3y$ 分别除以 $dx^2$, $dx^3$，则得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+f'(u)\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3+3f''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}+f'(u)\frac{d^3u}{dx^3}.$$

读者可以从 $y'=f'(u)$, $u=\varphi(x)$ 按复合函数直接求 $\frac{d^2y}{dx^2}$、$\frac{d^3y}{dx^3}$, 验证上面的结果.

【例 2】 设 $y=x^2$, 那么

$$dy=2xdx, \quad d^2y=2dx^2. \tag{6.9}$$

当 $x$ 又是 $t$ 的函数时, 例如 $x=\sin t$, 那么

$$y=\sin^2 t,$$

从而

$$dy=\sin 2t\,dt, \quad d^2y=2\cos 2t\,dt^2. \tag{6.10}$$

但是如果将 $x=\sin t$ 代入(6.9), 得

$$dy=\sin 2t\,dt, \quad d^2y=2\cos^2 t\,dt^2.$$

第一个结果与(6.10)相符, 第二个不符, 其中缺了一项

$$f'(x)d^2x=2x\cdot(-\sin t\,dt^2)=-2\sin^2 t\,dt^2.$$

【例 3】 设 $y=u(x)v(x)$, 其中 $u(x)$, $v(x)$ 都有 $n$ 阶导数, 求 $d^ny$.

解: 已知

$$y^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^nuv^{(n)},$$

所以

$$\begin{aligned} d^ny&=y^{(n)}dx^n \\ &=C_n^0(d^nu)v+C_n^1(d^{n-1}u)dv \\ &\quad+C_n^2(d^{n-2}v)d^2v+\cdots+C_n^nud^nv. \end{aligned}$$

## 习 题 六

1. $y=1-x^2-x^4$, 求 $y''$, $y'''$.
2. $f(x)=(x+10)^6$, 求 $f'''(2)$.
3. $y=x\cos x$, 求 $y''$, $y'''$.
4. $f(x)=e^{2x-1}$, 求 $f''(0)$.
5. $y=x^3\ln x$, 求 $y^{(4)}$.
6. $\rho=a\sin 2\varphi$, 求 $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4}$.
7. $x^2+y^2=r^2$, 求 $y'''$.
8. $x=1-t^2$, $y=t-t^3$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

9. 设 $x=\sqrt{1+t}$, $y=\sqrt{1-t}$, 求证 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}$.

10. 求下列曲线在指定点上的切线及法线方程:

(1) $x=2e^t$, $y=e^{-t}$ $(t=0)$;

(2) $x=\frac{3at}{1+t^2}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$ $(t=2)$.

11. 试证

$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)^{(n)}=e^{\alpha x}\left\{\sin\beta x\left[\alpha^n-\frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\alpha^{n-4}\beta^4+\cdots\right]+\cos\beta x\left[n\alpha^{n-1}\beta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^{n-3}\beta^3+\cdots\right]\right\}.$$

12. 试证

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

[提示: 用数学归纳法证明. 证明中注意

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)}=[(x^n e^{1/x})']^{(n)}$$

及

$$(x^{n-2}e^{1/x})^{(n)}=\left[(-1)^{n-1}\frac{e^{1/x}}{x^n}\right]'.$$

13. $y=\sqrt[3]{x^2}$, 求 $d^2y$.

14. $y=(x+1)^3(x-1)^2$, 求 $d^2y$.

15. $y=4^{-x^2}$, 求 $d^2y$.

16. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)$, 求 $d^2y$.

17. $y=\sqrt{(\ln x)^2-4}$, 求 $d^2y$.

18. $\rho^2\cos^3\varphi-a^2\sin^3\varphi=0$, 求 $d^2\rho$.

19. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, 求 $d^2y$.

20. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=\operatorname{tg}t$. 求 $d^2y$ (1)用 $x$ 和 $dx$ 表示; (2)用 $t$ 和 $dt$ 表示.

## 第四章小结

本章的标题包含导数及微分两个概念, 而实际上导数居主要地位. 导数是一种固定格式的极限. 介绍了这个概念之

后，几乎有三分之二的篇幅是推导导数公式．每步推导要根据极限运算的定理，这些定理都是用 $\varepsilon$–$\delta$ 定义论证的，因此可以说本章内容是前章理论的一次集中应用．

没有 $\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to 0)$ 就不能建立各种三角函数的导数公式；必须有 $e$ 的定义才能证明对数函数以及指数函数的导数公式；反三角函数的导数都是反函数导数公式的推论．这是一切基本导数公式的三个关键性理论．复合函数的导数与导数的运算公式，是拓展导数的工具，导数的效能也因此扩大．特别是复合函数概括的范围很广，对于复合函数的导数应该予以足够的注意．我们在主要导数公式表里，都按复合函数书写公式，就是从这观点出发的．

微分学的理论都是从函数的局部着眼的．函数在一点近旁的表现，和这点上的切线的表现差不多．切线是一次函数的图象，一次函数的性质很容易认识．为了用切线代替曲线，才产生导数的概念．有了导数就能象处理一次函数那样容易地处理曲线的问题(尽管说适用的范围很小)．——导数大于零则函数上升；导数小于零则函数下降．切线的微分是函数增量的很好的近似值．这都是导数提供的方便．导数与微分的几何解释，说明了其中各无穷小的内在联系，也能帮助我们记忆它们的关系．

参数方程的高阶导数虽然不容易计算，可是参数方程在物理上用处较多，尤其在三维空间的曲线上用得较多．这里仅就平面曲线作了初步的介绍，可以作为以后讨论空间曲线的初阶．高阶导数与高阶微分是给以后的理论作准备的．

本章前言说：导数是研究函数变化规律的工具．本章还没有正式接触这问题，等到第六章再讲．

# 第五章

# 中值定理

## 第一节 中值定理

有了导数便可以讨论函数的一些性质，但是不能作深入的讨论，所以我们把可以进行的讨论推后一步，放在本章之末.

本章所讲的内容，是讨论函数性质的重要理论，有了它们才可以很好地讨论函数的性质.

不要以为函数的性质无非是上升、下降、有界、无界、连续、间断等等. 比如要问 30° 附近的角的正弦该怎样计算？正弦表是怎样制成的？这类好象不属于函数性质的问题，却需要由函数的性质来解决. 本章的理论就承担着这样的重要任务. 虽然在此不是要讲造表法，而造表法的根据却在这里. 仅这一点就可以理解这一章内容的重要性了.

### 1.1 费尔马定理

**定理 1** 假若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $N(x_0, \delta)$ 里有定义，而且在这邻域里恒有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad 或 \quad f(x) \geqslant f(x_0),$$

又 $f'(x_0)$ 存在，那么 $f'(x_0)=0$.

这叫做费尔马(Férmat)定理.

【证】 由于 $f'(x_0)$ 存在，必然

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

这里$f'_+(x_0)$及$f'_-(x_0)$分别是函数在$x_0$点的右导数和左导数.

如果$f(x)\leqslant f(x_0)$,那么对于$(x_0,\ x_0+\delta)$里的一切$x$,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

因此

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0. \qquad (1.1)$$

这因为假若不然,而$f'_+(x_0)>0$的话,当$x-x_0$足够小时,根据第三章§1.8定理6推论,将要$[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)>0$,这时因为$x-x_0>0$,势必$f(x)-f(x_0)>0$,这与假设矛盾.

同理,

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0. \qquad (1.2)$$

比较(1.1)和(1.2)两式,必然$f'(x_0)=0$.

在$N(x_0,\ \delta)$内恒有$f(x)\geqslant f(x_0)$的情形的证明和这相仿. ▌

**定义1** 函数$f(x)$在$N(x_0,\ \delta)$内恒能满足

$$f(x)\leqslant f(x_0)$$

时,就说$f(x)$在$x_0$点取得极大值$f(x_0)$;如果在$N(x_0,\delta)$内恒能满足

$$f(x)\geqslant f(x_0),$$

就说$f(x)$在$x_0$点取得极小值$f(x_0)$.极大值与极小值合称极值.

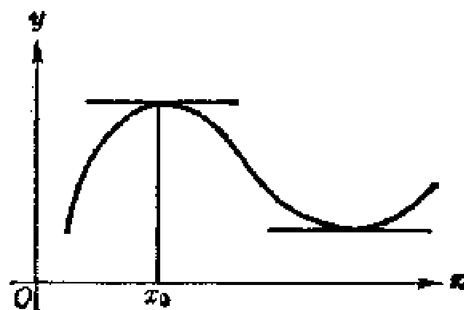



图 5-1

费尔马定理的几何意义是:光滑曲线$y=f(x)$在$x_0$点取

得极大值或极小值时(图 5-1)，曲线在$(x_0, f(x_0))$点的切线一定平行于 $x$ 轴.

## 1.2 罗尔定理

**定理 2** 假若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间$(a, b)$内有导数，$f(a)=f(b)$，那么至少有一点 $x_0\in(a, b)$，使得$f'(x_0)=0$.

这叫做罗尔(M. Rollo, 1652～1719, 法国数学家)定理.他自己提出这定理时，第三条假设是$f(a)=f(b)=0$. 这提法虽然特殊一些，但是用处并不少.这定理的几何意义是：$y=f(x)$的图象(图 5-2)是光滑曲线时，它在纵坐标相等的两点$A(a, f(a))$、$B(b, f(b))$之间的一段上，至少在一点$C(x_0, f(x_0))$的切线平行于 $x$ 轴，其实也就是平行于 $AB$.

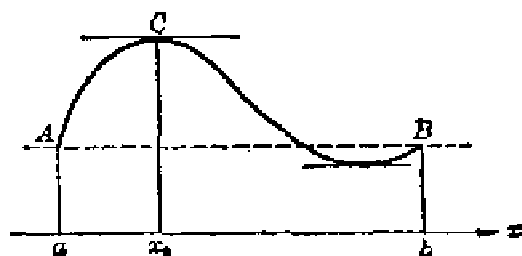


图 5-2

【证】 因为$f(x)$在$[a, b]$上连续，那么$f(x)$在$[a, b]$上能达到最大值 $M$ 与最小值 $m$(第三章 § 4.1).

如果 $M=m$，那么$f(x)$在$[a, b]$上是常数，$f'(x)$在$(a, b)$的每点上等于零，于是每个点可以作为定理结论里的$x_0$.

如果 $M>m$，那么$f(x)$在$[a, b]$上不是常数，$M$ 及 $m$ 之中至少有一个不等于$f(a)$及$f(b)$，于是$(a, b)$内至少有一点$x_0$使得$f(x_0)=M$ 或$f(x_0)=m$. 根据最大值(或最小值)的意义，对于$(a, b)$内的任何$x$，一定有

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad (\text{或} \quad f(x)\geqslant f(x_0)).$$

已知$f(x)$在$(a, b)$内有导数，因而$f'(x_0)$存在. 根据费尔马

定理，必然 $f'(x_0)=0$. ▌

定理的三个假设条件：(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续；(2) $f'(x)$ 在 $(a, b)$ 内存在；(3) $f(a)=f(b)$. 缺了任何一条都能举出实例，说明找不到 $x_0\in(a, b)$ 使得 $f'(x_0)=0$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<1; \\ 0, & x=1. \end{cases}\quad \text{缺少第一条假设；}$$

$$f(x)=|x|, \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \quad \text{缺少第二条假设；}$$

$$f(x)=x, \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \quad \text{缺少第三条假设.}$$

都不能在各自的定义域里找到满足 $f'(x_0)=0$ 的 $x_0$. 但是这三个假设条件仅是充分的，不能说有 $x_0$ 使 $f'(x_0)=0$ 便保证 $f(x)$ 具备这三个条件. 甚至可以举出三个条件都不成立的函数，却在定义域里有 $x_0$ 使 $f'(x_0)=0$. 例如

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{3\pi}{4}; \\ \cos x, & \dfrac{3\pi}{4}<x\leqslant \dfrac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $x=\pi$ 的邻域里，都满足费尔马定理的条件，所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'(\pi)=0$, 然而不具有罗尔定理的任何假设条件.

这说明费尔马定理需要的假设条件弱，从而应用范围广；而罗尔定理需要的假设条件强，从而适用的范围小. 但是前者的假设条件不如后者容易识别.

第三章 §4.1 的定理 1，根据确界的性质，已经断定闭区间上的连续函数必有最大值与最小值；那么只要 $f'(x)$ 存在，岂不就可以根据费尔马定理推得存在 $x_0$，使得 $f'(x_0)=0$ 了吗？但是闭区间上连续函数的最大值和最小值可能出现在区间的端点上，这就不符合罗尔定理的目的了. 现在使 $f(x)$

等于 $M$ 及 $m$ 的点各有一个．可能有一个是区间 $[a, b]$ 的端点，但是只要 $M\neq m$，另一个一定不是端点，因而属于 $(a, b)$．

## 1.3 拉格朗日定理

**定理 3** 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 $(a, b)$ 内有导数，那么至少有一点 $x_0\in(a, b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a). \tag{1.3}$$

这叫做微分学的**中值定理**，也叫做**拉格朗日**(J. L. Lagrange, 1736～1813, 法国数学力学家)**定理**．这定理的假设条件比罗尔定理少了 $f(a)=f(b)$ 一条，结论是

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

也不同于罗尔定理的 $f'(x_0)=0$．从几何上说，即是在 $A(a, f(a))$、$B(b, f(b))$ 间的光滑曲线上一定有一点 $C(x_0, f(x_0))$ 的切线(图 5-3)平行于 $AB$．

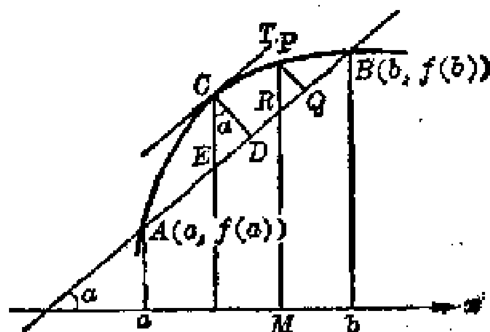


图 5-3

为了理解这定理的内在联系，先用几何分析一下：假设 $C$ 点的纵坐标与 $AB$ 交于 $E$，$CD\perp AB$ 于 $D$．$\angle ECD$ 是定角，等于 $AB$ 的斜角 $\alpha$，$CE=CD\sec\alpha$．曲线 $ACB$ 上任何一点 $P$ 都有这样的性质，例如 $PR=PQ\sec\alpha$．$CD$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 $AB$ 间距离的一个极值(因为切线 $CT\parallel AB$)，那么 $CE$ 是曲线各点纵坐标被 $AB$ 所截线段的一个极值．$x_0$ 是决定这极值的横坐标．那么现在如果有一个函数 $\varphi(x)$ 能表示 $CE$、$PR$ 这样的一切线段之长，问题就容易解决了．

假设 $P$ 点的横坐标是 $x$，纵坐标 $MP=MR+RP$．而

$MR$是直线 $AB$ 上 $R$ 的纵坐标. 只要有了 $AB$ 的方程, 就能计算 $MR$ 之长. 而 $AB$ 的方程是

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

所以

$$MR=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

从而 $RP$ 之长等于

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

使 $\varphi(x)$取得极值的 $x_0$, 就能使曲线在$(x_0, f(x_0))$点的切线平行于 $AB$.

【证】 作辅助函数 $\varphi(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)\ \text{在}[a,\ b]\text{上连续}\\ x-a\ \text{在}[a,\ b]\text{上连续}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(x)\text{在}[a,\ b]\text{上连续}.$$

$$\left.\begin{array}{l}f(x)\ \text{在}(a,\ b)\text{上有导数}\\ x-a\ \text{在}(a,\ b)\text{上有导数}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(x)\text{在}(a,\ b)\text{上有导数}.$$

经过计算知道 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

$\varphi(x)$具备了罗尔定理的假设条件, 所以有一点 $x_0\in(a, b)$, 使得 $\varphi'(x_0)=0$. 即是

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

移项后在等式两端同乘以 $b-a$ 即得(1.3). 】

公式(1.3)有几种不同的写法. 写详细一点应该是

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a),\quad a<x_0<b.$$

如果 $b<a$, 就应该写作

$$f(a)-f(b)=f'(x_0)(a-b),\quad b<x_0<a.$$

只从上边两个等式来说, 实际没有不同(一个的两端都变号就

是另一个)．不同的只是 $a$、$b$、$x_0$ 的不等关系．所以往往把两种情形合并为

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a),\quad x_0 \text{ 介于 } a、b \text{ 之间}.$$

或者写作

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\quad 0<\theta<1.$$

$b>a$，则 $a<a+\theta(b-a)<b$；$b<a$，则 $b<a+\theta(b-a)<a$．用一个 $\theta$ 可以概括两种情形．如果命 $\Delta x=b-a$，又可以把上面的等式写作

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta<1. \tag{1.4}$$

**推论 1** 设 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内是一个常数．

【证】 设定点 $x_1\in(a, b)$，$x$ 为 $(a, b)$ 内任意一点．根据拉格朗日定理

$$f(x)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x-x_1))(x-x_1),$$

因为 $f'(x_1+\theta(x-x_1))=0$，必然 $f(x)-f(x_1)=0$．即是 $(a, b)$ 内任一点上的函数值都等于 $f(x_1)$． ∎

**推论 2** 假若两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(a, b)$ 内满足 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 $(a, b)$ 内 $f(x)=g(x)+C$，其中 $C$ 是常数．

【证】 $f'(x)\equiv g'(x)\Rightarrow[f(x)-g(x)]'\equiv 0$.

根据推论 1，知道 $f(x)-g(x)=C$，即是

$$f(x)=g(x)+C. \quad ∎$$

拉格朗日定理的两个假设条件缺一不可，读者自己可以设计两个反例．这两个条件也只是充分的．

拉格朗日定理是数学分析中重要定理之一，以后用它的地方很多，在近似计算方面也有很大的应用价值．把公式 (1.3) 改成 (1.4) 之后，显然 $f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 是函数增量的正确值，所以这定理也叫做**增量定理**，(1.3) 叫做**增量公式**．一次

函数的导数是常数，在增量公式里无需确定 $x_0$ 的值．当 $f(x)$ 是二次函数时，很容易证明公式里的 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 或 $\theta=\frac{1}{2}$．除此而外，没有确定 $x_0$ 的好方法．假若对于一般函数也取 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 或 $\theta=\frac{1}{2}$，公式虽不绝对正确，但当 $b-a$ 很小时，仍有相当高的近似程度，所以

$$f(b)\approx f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

因而可以说，用 $(a,\ b)$ 间的直线

$$y=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-a)$$

上的点的纵坐标代替 $(a,\ b)$ 间曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标，误差很小．只要 $a+\Delta x\in(a,\ b)$，便有近似公式

$$f(a+\Delta x)\approx f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\Delta x.$$

【例】 已知 $\ln 781=6.66058$，在 $[781,\ 789]$ 内求 $\ln 782$ 及 $\ln 783$．这可以利用 (1.3) 取 $a=781$，$b=789$，$\frac{1}{2}(a+b)=785$，$\Delta x$ 分别为 1 及 2．于是

$$\begin{aligned}\ln 782&\approx\ln 781+\frac{1}{785}\times 1\\&=6.66058+0.00127\\&=6.66185.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 783&\approx\ln 781+\frac{1}{785}\times 2\\&=6.66058+0.00254\\&=6.66312.\end{aligned}$$

五位自然对数表里，这两个对数是 6.66185和 6.66313．

## 1.4 柯西定理

**定理 4** 假若两函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 $(a, b)$ 内有导数，并且 $g'(x)\neq 0$. 那么至少有一点 $x_0\in(a, b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{1.5}$$

这叫做柯西(O. Cauchy, 1789～1859, 法国数学家)定理，也是一条中值定理. (1.5) 叫做柯西公式. 如果 $g(x)=x$，(1.5) 就是拉格朗日公式. 所以拉格朗日定理是柯西定理的特例. (1.5) 右端是两个函数在同一点的导数之商. 在前面参数方程的导数公式里遇到过这样的分式. 这启发我们想到 (1.5) 可能与参数方程确定的函数有关系. 姑且把图 5-3 的曲线的参数方程看作是

$$x=g(t),\quad y=f(t).$$

那么 $[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]$ 便是割线 $AB$ 的斜率. $f'(t_0)/g'(t_0)$ 是曲线上一点的斜率. (1.5) 的几何意义与 (1.3) 一样.

前面为了证明 (1.3)，从曲线 $y=f(x)$ 各点的纵坐标减去割线 $AB$ 上对应点的纵坐标，就把问题归结为罗尔定理了. 我们再按这个想法试试看. 现在曲线的纵坐标是 $y=f(t)$，直线 $AB$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x=g(t), \\ y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(t)-g(a)), \end{cases}$$

所以线段 $RP$ (图 5-3) 之长应该表示为

$$F(t)=f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(t)-g(a)).$$

那么使 $F(t)$ 取得极值的点，便是使切线平行于 $AB$ 的点.

【证】 首先证明(1.5)的左端有意义，即是证明 $g(b) \neq g(a)$. 设若不然，而是 $g(b)=g(a)$，那么 $g(x)$ 满足罗尔定理的一切假设条件，$g'(x)$ 将在 $(a, b)$ 的某点等于零. 这与假设矛盾.

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

很容易证明 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 $(a, b)$ 内有导数，$F(a)=F(b)=0$. 根据罗尔定理知道，至少有一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $F'(x_0)=0$，即是

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0.$$

从而(1.5)成立. ▌

## 习 题 一

1. 假若费尔马定理中的 $x_0$ 是区间的端点，试举例说明这定理的结论不能成立.
2. 假若在费尔马定理中，$f(x)$ 在 $x_0$ 点的导数是无穷大，证明 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左、右导数一定是 $+\infty$ 与 $-\infty$ 各在一侧.
3. 验证罗尔定理对下列函数是否成立:

   (1) $y=x-[x]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

   (2) $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & -\dfrac{2}{\pi} \leqslant x<0 \text{ 及 } 0<x \leqslant \dfrac{2}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

   (3) $y=(x-3)(x-4)$, $3 \leqslant x \leqslant 4$.
4. 试证方程 $x^3-3x^2+c=0$ 在区间 $[0, 1]$ 内不能有两个不同的实根，其中 $c$ 是实数.
5. 假设区间 $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上曲线 $y=|\cos x|$ 的两个端点是 $A$、$B$. 这时为

什么没有平行于 $AB$ 的切线?拉格朗日定理的哪条假设不成立?

6. 假若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 存在着有界的导数，试证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足条件

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

其中 $L$ 是常数, $x'$, $x''$ 是 $[a, b]$ 的任意两点。

7. 用拉格朗日公式证明不等式:

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(2) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\quad x>0$;

(3) 若 $x\neq 0$, $e^x>1+x$(分 $x>0$ 及 $x<0$ 两种情形证明).

8. 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x\ (0<\theta<1)$，求函数 $\theta=\theta(x, \Delta x)$，已知

(1) $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x)=e^x$.

9. 对于下列函数写出拉格朗日公式

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a),$$

并且求 $x_0$:

(1) $f(x)=x^3,\quad a\leqslant x\leqslant b$;　　(2) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$.

## 第二节　洛必达法则

### 2.1　不定式

依照极限的运算法则求某些函数的极限，时常遇到几种奇怪的结果，例如

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\dfrac{x}{a}}{x-a},\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x},\qquad \lim_{x\to 0^+}x\ln x,$$

$$\lim_{x\to 0}x^x,\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x},\qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left[\sec x-\frac{1}{1-\sin x}\right].$$

如果按照运算法则或复合函数的极限来计算，这些问题的答案将是：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ \infty-\infty.$$

这些都叫做不定式．究竟这些极限是否存在？是什么数值？必须另想办法去解决．

根据柯西公式，可以利用导数推证一些方法来解决这类问题，这就是下面要讲的洛必达(L' Hospital, 1661～1704, 法国数学家)法则．

## 2.2 $\frac{0}{0}$ 型不定式

发生这种不定式的情形有两种：一种是在自变量趋于有限数时发生的；另一种是自变量趋于无穷时发生的．先讨论第一种情形．

**定理 1** 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a$ 点的空心邻域 $\mathfrak{N}(a,\delta)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$．$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $\mathfrak{N}(a,\delta)$ 内存在，$g'(x)\neq0$，并且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或是 $\infty$）．那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在并且等于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$．

【证】 为了叙述方便，先在 $a$ 点的右邻域 $(a, a+\delta)$ 里证明这定理．

$f'(x)$、$g'(x)$ 存在，$x\in(a, a+\delta)\Rightarrow f(x)$、$g(x)$ 连续，$x\in(a, a+\delta)$．用 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 定义 $f(a)=g(a)=0$．那么 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, a+\delta)$ 内连续，对于任何 $x\in[a, a+\delta)$，

$f(x)$、$g(x)$在闭区间$[a, x]$上满足柯西定理的一切假设条件，于是$(a, x)$内总有一点$c$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

当$x\to a$时，夹在$a$与$x$之间的$c$，一定也趋于$a$. 所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

左邻域$(a-\delta, a)$的情形与此相仿.

如果 $$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty,$$

则应有 $$\lim_{x\to a}f'(x)\neq 0,$$

而 $$\lim_{x\to a}g'(x)=0,$$

这时 $$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

因而 $$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

由此 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ ▌

【例 1】 求$\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$在$x=2$时的值.

解：当$x=2$时，这分式是$\dfrac{0}{0}$型的不定式. 分子分母在2的邻域里满足定理1的要求，可以用洛必达法则试探：

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x+1}=\frac{4}{5}.$$

这解法不必象以前那样先消去分子分母的公因子$x-2$. 那样求得的结果和这里的一样.

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

解：在1的邻域里，$\ln x$，$x-1$都连续，又各有导数$\frac{1}{x}$，1．后者永不为零．所以这$\frac{0}{0}$型不定式可以用洛必达法则试探：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

如果试探到$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$又是$\frac{0}{0}$型的不定式，可以再对$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$使用洛必达法则，只要$f'(x)$、$g'(x)$满足定理1的条件即可．

【例3】 用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型不定式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$的值．

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

右端又是$\frac{0}{0}$型不定式，它的分子与分母满足定理1的要求，因此可以再用洛必达法则试探：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}.$$

右端还是$\frac{0}{0}$型不定式，因此需要再试：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2.$$

现在转过来讨论$x\to\infty$时的不定式$\frac{0}{0}$．

**定理 2** 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有定义 $(a>0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都在 $[a, +\infty)$ 内存在，$g'(x)\neq 0$. 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或等于 $\infty$). 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在而且等于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

【证】 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $t=\dfrac{1}{x}$，$x\to+\infty\Leftrightarrow t\to 0^+$. 这时 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$、$g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 在 $(0, 1/a]$ 内有定义，

$$\lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

$$\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)=f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

$$\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

在 $(0, 1/a]$ 内存在而且 $\dfrac{d}{dt} g\left(\dfrac{1}{t}\right)\neq 0$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{d}{dt} f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{d}{dt} g\left(\dfrac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}.$$

右端实际是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，那么左端的极限存在. 由此，$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 和 $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 在 $(0, 1/a]$ 内具备了定理 1 的一切条件. 所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}.$$

将自变量还原，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$x\to-\infty$ 的情形和这一样. 】

【例 4】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\text{arc tg}\,x}{\dfrac{1}{x}}$.

解: $\dfrac{\pi}{2}-\text{arc tg}\,x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 满足定理 2 的条件,因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\text{arc tg}\,x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

这例题里把洛必达法则的结果化简以后, 再按极限理论求得其答案. 这种化简是合理的,也是必要的. 不仅如此,还可以约去分子分母的公因子, 或者利用已知的极限把某个因子的极限分出去,以便把运算化简.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)e^{2x}+(x+2)e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$.

解: 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 用洛必达法则将原题变为

$$\lim_{x\to0}\frac{(2x-3)e^{2x}+(x+3)e^{x}}{3(e^{x}-1)^{2}e^{x}}.$$

这里的分子已经合并化简, 但是分子与分母还有公因子 $e^x$ 可以约去. 此外常数因子 $\dfrac{1}{3}$ 显然可以提到极限记号之外,即得

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(2x-3)e^{x}+(x+3)}{(e^{x}-1)^{2}}.$$

这还是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 再用洛必达法则变为

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(2x-1)e^{x}+1}{2e^{x}(e^{x}-1)}.$$

分母中的因子 $2e^x$ 不是构成不定式的因素. 可以把它的极限

2 按乘积的极限分出来，这样又变为

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)e^x+1}{e^x-1}.$$

再应用洛必达法则，得

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)e^x}{e^x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}(2x+1)=\frac{1}{6}.$$

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

右端第一因子 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的极限是 $e$. 把它分出去只考虑第二因式的极限；使用两次定理1，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1+x}}{2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+x)(2+6x)}=-\frac{1}{2}.$$

答案是 $-\dfrac{e}{2}$.

## 2.3 $\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式

遇到这种不定式时，求极限的方法，还是和前面一样，但是方法的理论证明略难一点．现在只把定理写出来以备引用，不加证明．

**定理 3** 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a$ 的空心邻域 $\mathfrak{N}(a,\delta)$ 里有定义，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $\mathfrak{N}(a,\delta)$ 内存在，$g'(x)\neq 0$；并且 $\lim\limits_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$ 存在（或是 $\infty$），那么

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]$存在而且等于$\lim\limits_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$.

**定理 4** 函数$f(x)$和$g(x)$在$(b, +\infty)$内有定义,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\infty;$$

$f'(x)$和$g'(x)$在$(b, +\infty)$内存在,$g'(x)\neq0$,并且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)/g'(x)]$存在(或是$\infty$),那么$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)/g(x)]$存在,而且等于$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)/g'(x)]$.

【例 1】 求不定式$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$之值.

解: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\Big/\dfrac{2\sec^2 2x}{\operatorname{tg} 2x}\right)$

等式右端的分式化简后得$\cos 2x$,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 2x=-1.$$

【例 2】 试证$\alpha>0$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

【证】 根据洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

这例题表示,不论$\alpha$是多么小的正数,$x^\alpha$趋于$\infty$总比$\ln x$趋于$\infty$快.

【例 3】 假设$a>1$, $\alpha>0$,试证$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0$.

【证】 假设$n-1\leqslant\alpha<n$, $n$是正整数.由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\frac{\alpha}{\ln a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{a^x}.$$

如果$0<\alpha<1$，右端的极限是0，问题便得到证明．如果$\alpha>1$，可以再用洛必达法则．每用一次洛必达法则，除去增加一个常数因子外，分子降低一次，分母不变，这样进行$n$次后便得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(\ln a)^{n}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-n}}{a^{x}}.$$

这时$-1\leqslant\alpha-n<0$，右端极限符号后面的分式实际是$\frac{1}{x^{n-\alpha}a^{x}}$，显然它的极限是零．

这例题表示，不论正数$\alpha$多么大，$x^{\alpha}$趋于$\infty$总不及$a^{x}$趋于$\infty$快．

## 2.4 其他型的不定式

在§2.1列举的各种不定式中，$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$是基本的，其余五种都能变成这两种情形．

如果$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，那么$\lim f(x)\cdot g(x)$便是$0\cdot\infty$型的不定式．这时将函数写作

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},$$

就变成$\frac{0}{0}$型的不定式了．若是写作

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

就变成$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式了．然后按§2.2和§2.3的方法求极限即可．

【例1】 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec 3x\cos 5x$的值．

解：这是 $0\cdot\infty$ 型的不定式，用 $\frac{1}{\cos 3x}$ 代替 $\sec 3x$，函数变为 $\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$，就是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式．由此

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec 3x \cos 5x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x} = -\frac{5}{3}.$$

$0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$ 三种不定式都是从形式为 $f(x)^{g(x)}$ 的函数产生的．当 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ 时，便是 $0^0$ 型的不定式．当 $\lim f(x) = 1$，$\lim g(x) = \infty$ 时，便是 $1^\infty$ 型的不定式．显然 $\infty^0$ 发生于 $\lim f(x) = \infty$，$\lim g(x) = 0$．将 $y = f(x)^{g(x)}$ 两端取对数，得

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

右端的函数在三种情形下都是 $0\cdot\infty$ 型的不定式．用上面的方法求得 $\lim(\ln y) = \lim[g(x)\ln f(x)]$，然后求 $y$．

【例 2】 求 $x^x$ 当 $x\to 0^+$ 时的极限．

解：这是 $0^0$ 型的不定式．令 $y = x^x$，取对数

$$\ln y = x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}，属于 \frac{\infty}{\infty} 型.$$

根据洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

这说明 $\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+}(\ln x^x) = 0$．所以 $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$．

【例 3】 求 $\lim_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$ 的值．

解：这是 $1^{\infty}$ 型的不定式.

$$\ln[(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}]=\frac{\ln\ln x}{1-\ln x}\quad\left(为\frac{0}{0}型\right),$$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to e}\frac{-1}{\ln x}=-1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to e}\ln[(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}]=-1$, 因而

$$\lim_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}=\frac{1}{e}.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

解：这是 $\infty^0$ 型的不定式.

$$\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right]=-\sin x\ln x=\frac{\ln x}{-\csc x}\quad\left(为\frac{\infty}{\infty}型\right),$$

但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{-\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\csc x\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\operatorname{tg}x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x=1\cdot 0=0.$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1.$$

$\infty-\infty$ 型的不定式，一般能把函数合并成一个分式，这分式是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定式.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

解：这是 $\infty-\infty$ 型的不定式.

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1-\sin x}{\cos x} \quad \left(为\ \frac{0}{0}\ 型\right),$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

最后注意，洛必达法则只说 $\lim[f'(x)/g'(x)]$ 存在时，$\lim[f(x)/g(x)]$存在．这不包括 $\lim[f'(x)/g'(x)]$ 不存在时，$\lim[f(x)/g(x)]$不存在．

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 时，若是按 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式用洛必达法则，将会是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

右端极限不存在．但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

【例 7】 对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 用一次洛必达法则，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，仍然是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式．再用一次洛必达法则，便回到原来的问题．可见原题不能用洛必达法则去解．实际上用初等方法就够了．

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$$

## 习 题 二

1．用洛必达法则求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$　$(a>0,\ n>0)$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\quad(\alpha>0)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x\quad(\alpha>0)$;　　(8) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;　　(12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$;　　(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x\right)^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

2. 说明下列函数的极限不能用洛必达法则计算:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

## 第三节　泰 勒 公 式

§1.3 里讲的拉格朗日公式,若是写为

$$f(x)-f(a)=f'[a+\theta(x-a)](x-a),$$

就可以计算函数在 $a$ 点附近的增量,或估计误差.若是写为

$$f(x)=f(a)+f'[a+\theta(x-a)](x-a),$$

对于计算 $a$ 点附近的函数值很方便,但是对研究函数的性态,这公式的效力还不够,所以需要把这理论再推进一步. 本节就是要作这样的推广,推得的结果叫做泰勒(B. Taylor, 1685~1731,英国数学家)公式. 这公式不论在理论上或实用上都很重要.

## 3.1 多项式的泰勒公式

一元多项式是十分简单的函数，先把它讨论一下，作为正式课题的引子．假设 $a_0$, $a_1$, …, $a_n$ 都是实常数，对于多项式

$$y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{3.1}$$

最容易求得它当 $x=0$ 时的值 $f(0)=a_0$，当 $|x|$ 很小时，要计算 $f(x)$ 的近似值，也不难判断从第几项以后略去不计，而不致突破允许的误差限度．比如已知 $|a_i|<100(i=0, 1, \cdots, n)$ 指定误差不得超过 $\frac{2}{100}$，$|x|\leqslant\frac{1}{10}$，那么这时取 $f(x)$ 的前四项就够了（读者证明）．$|x|$ 很小时也容易求得 $f(x)$ 的近似值．此外，在 $x=0$ 时函数是上升还是下降，也是容易观察的．比如 $a_1\neq0$ 时，因为 $a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ 是 $x$ 的高阶无穷小，它的绝对值总会变得小于 $|a_1x|$，于是 $f(x)-f(0)$ 的符号就决定于 $a_1$ 和 $x$ 了．在原点讨论 $f(x)$ 的性质，就有这么多方便条件．

如果希望在 $x=a(a\neq0)$ 的近旁了解 $f(x)$ 的同样一些性质，就不那样方便了．但是多项式

$$g(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n \tag{3.2}$$

在 $x=a$ 的近旁照样有(3.1)在 $x=0$ 时的一切方便．如果希望讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 的近旁是什么情形，最好把(3.1)变成(3.2)的形式——按 $x-a$ 的方幂把 $f(x)$ 展开．

假定(3.1)里的多项式能变成(3.2)的形式：

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n.$$

令 $x=a$，得 $b_0=f(a)$．将等式两端同时求导数，得

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+\cdots+nb_n(x-a)^{n-1}.$$

再令 $x=a$，得 $b_1=f'(a)$，这上式两端再求导数，得

$$f''(x)=2!b_2+3.2b_3(x-a)+\cdots+n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}.$$

再令 $x=a$，解得 $b_2=\dfrac{1}{2!}f''(a)$，这样继续进行下去，一直求到第 $n+1$ 阶导数的两端都等于零时为止．这样一共求得

$$b_0=f(a),\ b_1=\frac{f'(a)}{1!},\quad b_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \cdots,\ b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

从而得

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad (3.3)$$

这叫做多项式 $f(x)$ 的泰勒公式．

【例 1】 按 $x+1$ 的方幂展开 $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$．

解：由 $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$， 得 $f(-1)=8$；

由 $f'(x)=3x^2+6x-2$， 得 $f'(-1)=-5$；

由 $f''(x)=6x+6$， 得 $f''(-1)=0$；

由 $f'''(x)=6$， 得 $f'''(-1)=6$．

所以

$$f(x)=8-\frac{5}{1!}(x+1)+\frac{6}{3!}(x+1)^3$$
$$=8-5(x+1)+(x+1)^3.$$

【例 2】 按 $x$ 的方幂展开 $(1+x)^n$，其中 $n$ 是正整数．

解：按 $x$ 的方幂展开，即是按 $x-0$ 展开，在泰勒公式中应该取 $a=0$．令

$f(x)=(1+x)^n$， 则 $f(0)=1$；

由 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}$， 得 $f'(0)=n$；

由 $f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$， 得 $f''(0)=n(n-1)$；

………………………………………………

一般得：

$$f^{(k)}(0)=n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots+x^n.$$

可见牛顿二项展开式，实际是泰勒公式的特例.

## 3.2 泰勒公式的引入

多项式以外的函数象 $y=e^x$, $y=\sin x$, 一定不能准确地用多项式表示，但是在实用上又非常需要了解这些函数的性质或计算它们的数值. 多项式所需要的计算是最简单的，其中仅涉及加、减、乘. 如果能用多项式近似地表示这些函数，也是很有价值的工作.

为了叙述上的方便，我们引入一个符号，如果 $\alpha$ 是无穷小，那么 $\alpha$ 的高阶无穷小就用 $o(\alpha)$ 表示. 阶次高于 $\alpha^n$ 的无穷小，就简写为 $o(\alpha^n)$.

例如函数的增量 $\Delta y$ 与微分 $dy$ 之差是 $\Delta x$ 的高阶无穷小，就记作

$$\Delta y-dy=o(\Delta x),$$

也就是

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

又如 $x\to 0$ 时，取

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

的前四项作为 $f(x)$ 的近似式，后面舍去的 $n-3$ 项之和

$$a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n$$

是比 $x^3$ 高阶的无穷小，于是便可写作

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3). \qquad (3.4)$$

$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小时，记作$\beta=O(\alpha)$。例如$x\to 0$时，$\sin 2x=O(x)$.

假设$y=f(x)$在$a$点有导数$f'(a)$，前章讨论导数的几何意义时，已经知道$x\to a$时，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

略去$o(x-a)$，就得到近似等式

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a). \qquad (3.5)$$

右端的一次多项式

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

叫做$f(x)$的一次近似式。它的误差是

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)=o(x-a).$$

用(3.5)处理$f(x)$的数值，可能过于粗糙，$|x-a|$稍大一点，误差就可能超出问题的限度。于是试试看能否找到三个常数$A_0$，$A_1$，$A_2$，使得

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+o[(x-a)^2]. \qquad (3.6)$$

这是试探性工作，一方面要问$A_0$，$A_1$，$A_2$是什么数值，另一方面要注意$f(x)$需要具备什么条件才能达到目的。

显然$f(x)$在$a$点连续的话，当$x\to a$时就得到

$$f(a)=A_0,$$

于是(3.6)变为

$$f(x)=f(a)+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+o[(x-a)^2].$$

由此

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A_1+A_2(x-a)+\frac{o[(x-a)^2]}{x-a}.$$

如果$f'(a)$存在的话，令$x\to a$，从这等式取极限，得

$$f'(a)=A_1.$$

于是(3.6)又变为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+A_2(x-a)^2+o[(x-a)^2].$$

这又可改为

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=A_2+\frac{o[(x-a)^2]}{(x-a)^2}.$$

如果 $f''(a)$ 存在，令 $x\to a$，在等式两端取极限，左端使用两次洛必达法则，得

$$\frac{f''(a)}{2!}=A_2,$$

再代入(3.6)，便得到我们期待的等式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o[(x-a)^2].$$

这里对于 $f(x)$ 的要求是 $f'(a)$，$f''(a)$ 存在．等式右端中的二次多项式

$$P_2(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

叫做 $f(x)$ 的二次近似式．最后一步实际上是证明了

$$f(x)-P_2(x)=o[(x-a)^2]. \tag{3.7}$$

怎见得呢？

$$\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}-\frac{f''(a)}{2},$$

而右端的极限是 0，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=0.$$

这就是(3.7)所表示的涵义．

显然这方法可以继续推行．可以证明：$f(x)$ 在 $a$ 点有一至 $n$ 阶的导数时，

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n].$$

这叫做$f(x)$的$n$阶泰勒公式．而

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

叫做$f(x)$的$n$次泰勒多项式，也就是$f(x)$的$n$次近似式，$o[(x-a)^n]$叫做$n$阶泰勒公式的余项．余项有许多不同的形式，现在这个形式叫做皮亚诺余项．

## 3.3 泰勒公式

实用上用泰勒多项式代替函数时，有一个很重要的问题是估计误差，就是估计泰勒公式中的余项．皮亚诺余项对于这项工作是很不够的．因此一般都把假设条件加强一点，使得泰勒公式的余项更具体些，以便拿它进行计算．为此提出下面这条定理:

**定理1** 假若函数$f(x)$在$a$点的邻域里有连续的$n+1$阶导数，那么

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3.8}$$

其中$\xi$是$a$与$x$之间的一个数。

这公式里的余项

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

叫做拉格朗日余项，它的优点是和公式里其他项的形式一致．当然这里特别的一点，是 $f^{(n+1)}(\xi)$ 取代了 $f^{(n+1)}(a)$．

【证】 这定理的证明要重复使用柯西定理，目的主要是决定余项 $R_n(x)$ 的表示式，为此先集中地把 $R_n(x)$ 及其 $n+1$ 阶导数分析一下．为了便于讨论，先认为 $a<x$：

$$R_n(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

因为 $f(x)$ 有连续的 $n+1$ 阶导数，那么 $R_n(x)$ 在 $[a, x]$ 上连续，而且有连续的 $n+1$ 阶导数．这些导数是：

$$R_n'(x)=f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$R_n''(x)=f''(x)-f''(a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a),$$

$$R_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a),$$

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

显然，
$$R_n^{(k)}(a)=0\quad(k=1, 2, \cdots, n).$$

另外，$g(x)=(x-a)^{n+1}$ 在$[a, x]$内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，而且除去 $g^{(n+1)}(x)$ 而外在 $x=a$ 时都等于零，那么 $R_n^{(k)}(x)$ 与 $g^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n, n+1)$ 都具备柯西定理的条件．对 $R_n(x)$ 与 $g(x)$ 应用柯西定理，得

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}\quad(a<\xi_1<x).$$

对于 $R_n'(\xi_1)$, $g'(\xi_1)$再使用柯西定理，得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(a)}{g'(\xi_1)-g'(a)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}\quad(a<\xi_2<\xi_1).$$

这样推导 $n$ 次，得

$$\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}=\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})-R_n^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(a)}$$
$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}\quad(a<\xi_n<\xi_{n-1}).$$

最后对于 $R_n^{(n)}(\xi_n)$, $g^{(n)}(\xi_n)$使用柯西定理，得

$$\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(\xi_n)-g^{(n)}(a)}$$
$$=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}\quad(a<\xi<\xi_n).$$

但是 $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$, $g^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，所以

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots$$
$$=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

由此，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

所以(3.8)成立.

对于 $x<a$ 的情形，用同样方法证明. ▌

$n=0$ 时，泰勒公式变为

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a).$$

这就是增量公式. 所以泰勒公式是增量公式的推广.

## 3.4 泰勒公式的别种形式

拉格朗日余项时常写为

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

如果把 $a$ 换作 $x$, $x$ 换作 $x+\Delta x$, 泰勒公式就成为

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\Delta x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

由此得

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$=df(x)+\frac{1}{2!}d^2f(x)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi).$$

这是用微分表示增量的公式, 也称为泰勒公式.

当 $a=0$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

这叫做马克劳林(C. Maclaurin, 1698～1746)公式.

【例 1】 将指数函数 $e^x$ 在 $x=0$ 的近旁展开为泰勒公式.

解: $e^x$ 的任何阶导数都是 $e^x$, $e^x|_{x=0}=1$, 用马克劳林公式, 得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

【例 2】 用马克劳林公式展开 $f(x)=\sin x$.

解: $f(0)=0$, 又因为 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, 所以

$$f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0,\ \cdots$$

代入马克劳林公式，得

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x+n\pi)\quad (0<\theta<1).$$

相仿地容易得到

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\theta x+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad (0<\theta<1).$$

【例 3】 求 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ 在 $x=2$ 的近旁的三阶泰勒展开式.

解: $f(2)=2$. 又 $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$，由此知道

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{(x-1)^{k+1}}.$$

所以 $f'(2)=-1$, $f''(2)=2$, $f'''(2)=-3!$, 代入泰勒公式，得

$$\frac{x}{x-1}=2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}.$$

## 3.5 泰勒多项式

现在简略地说一下，怎样估计泰勒多项式的误差. 这当然在于余项 $R_n$. 假设 $f^{(n+1)}(x)$ 在某区间 $[a, b]$ 上有界. 并且 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_{n+1}$, 那么在 $[a, b]$ 上

$$|R_n|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

把右端的数值记作 $\delta_n$，那么在整个区间 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 代替

$f(x)$时，出现的最大误差不会超过$\delta_n$.

【例】 已知(§3.4 例 2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}.$$

现在在区间$[0, a]$内讨论近似式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

的误差. 这里$|\sin(\theta x + n\pi)| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$. 因而上面所说的$\delta_n$是

$$\delta_n = \frac{1}{(2n)!} \cdot 1 \cdot a^{2n} = \frac{a^{2n}}{(2n)!}.$$

如果在区间$\left[0, \frac{\pi}{90}\right]$内考虑常用的近似等式

$$\sin x \approx x,$$

则

$$\delta_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{3 \cdot 6}{90}\right)^2 < \frac{8}{10000} < 0.001.$$

这说明在0°与2°之间用$x$代替$\sin x$时，小数的首三位数字是正确的.

又如在区间$\left[0, \frac{\pi}{18}\right]$内考虑近似等式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

则

$$\delta_4 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 < \frac{1}{4!}\left(\frac{3 \cdot 6}{18}\right)^4 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^4 < \frac{1}{10^4}.$$

这说明在0°与10°之间，用$x - \frac{x^3}{3!}$代替$\sin x$时，可以准确到四位小数.

## 习 题 三

1. 按$(x-4)$的方幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

2. 取 $a=-1$, 求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的 $n$ 阶泰勒展开式.

3. 求函数 $y=xe^x$ 的 $n$ 阶马克劳林展开式.

4. 取 $a=0$, 求函数 $y=\arcsin x$ 的三阶泰勒展开式.

5. 写出函数 $y=x^2\ln x$ 在点 $a=1$ 的 $n(>3)$ 阶泰勒展开式.

6. 证明 $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}\quad(0<\theta<1)$.

7. 若 $a=0$, 求函数 $y=e^{\sin x}$ 的二阶泰勒展开式.

8. 如果当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 $e^x$ 的近似值, 证明所产生的误差小于0.01, 并求 $\sqrt{e}$ 的近似值, 使误差小于0.01.

9. 写出函数 $y=\ln(1-x)$ 在点 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的 $n$ 阶泰勒展开式.

10. 用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

    (1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sin 18°$.

# 第四节 函数的讨论

单用一阶导数就可以讨论函数的一些性质, 因为那时不能充分讨论, 所以没有在第四章安排这项内容. 现在有条件作系统的讨论了. 这种讨论不能不涉及函数的图象, 所以也有些内容是关于导数在几何上的应用.

## 4.1 函数的上升与下降

在第一章§2.9已经讲过函数上升或下降的概念, 现在在导数的基础上进一步讨论这个问题.

**定理1** 假若函数$f(x)$在一点$x_0$有导数，则

(1) $f'(x_0)>0$时，$f(x)$在$x_0$点上升；

(2) $f'(x_0)<0$时，$f(x)$在$x_0$点下降。

【证】 (1) 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)>0,$$

那么当$|\Delta x|$小到适当的程度以后，$\Delta x$便永远满足

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0.$$

这时候$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$与$\Delta x$同号.

$\Delta x>0$时，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$，即是$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$；

$\Delta x<0$时，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$，即是$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$.

所以$f(x)$在$x_0$点上升.

(2) 的证明和这相仿. ▮

这定理提出了一个判别函数在一点升、降的方法，比起第一章按定义直接检查的方法省事多了.

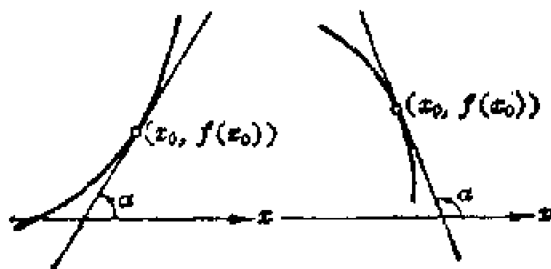



图 5-4

再从几何的意义来看：曲线在$(x_0, f(x_0))$点的切线对$x$轴的斜角$\alpha$(图5-4)是锐角时，曲线上升；是钝角时，曲线下降. 这是第四章§1.5从直观上已经认识到的.

**定理2** 假若函数$f(x)$在$x_0$点有导数$f'(x_0)$，并且

(1) 在这点上升，则$f'(x_0)\geqslant 0$；

(2) 在这点下降，则$f'(x_0)\leqslant 0$.

【证】 (1) 因为$f(x)$在$x_0$点上升，那么当$\Delta x$足够小时，

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$与$\Delta x$同号，所以永远有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0.$$

当$\Delta x\to 0$时，左端的极限$f'(x_0)$可以是正数也可以是0，但不能是负数(第二章§3.1定理1推论2).

(2)的情形，可仿此证明. ❚

这定理说明：曲线尽管上升，切线的斜角可以是锐角，也可以等于零，即切线平行于$x$轴. 例如$y=x^3$处处上升，而在原点的切线重合于$x$轴，其他切线的斜角都是锐角；$y=-x^3$可以作为(2)条的例证.

从定理1和定理2来看，函数的导数在一点取正值，是函数在这点上升的充分条件，而不是必然条件. 函数在一点上升的话，在这点的导数可能是正数，也可能是零. 函数下降与导数取负值的情形也这样.

现在把定理1和定理2扩展到区间上来. 定理2的直接结果是：

**定理3** 假若$f(x)$的导数$f'(x)$在$(a, b)$内存在，则

(1) $f(x)$在$(a, b)$内上升$\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$, $x\in(a, b)$;

(2) $f(x)$在$(a, b)$内下降$\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$, $x\in(a, b)$.

定理1的推广是

**定理4** 假若$f(x)$的导数$f'(x)$在$(a, b)$内存在，则

(1) 在$(a, b)$内$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$在$(a, b)$内上升；

(2) 在$(a, b)$内$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$在$(a, b)$内下降.

【证】 设$x_1$, $x_2$是$(a, b)$内任意两点，$x_1<x_2$. 根据拉格朗日定理

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

由$x_2-x_1>0$，所以$f(x_2)-f(x_1)$的符号与$f'(\xi)$相同. 在情

形(1)，$f'(\xi)>0$，所以$f(x_2)>f(x_1)$，$f(x)$上升．在情形(2)，$f'(\xi)<0$，所以$f(x_2)<f(x_1)$，$f(x)$下降． ∎

根据定理 4，可以用导数辨别函数的单调区间：$f'(x)$的正号区间是$f(x)$的上升区间；$f(x)$的负号区间是$f(x)$的下降区间．

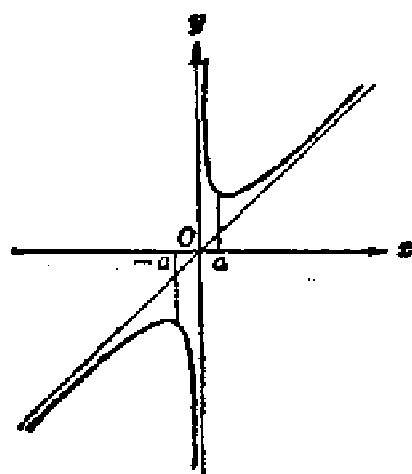


图 5-5

【例】 $y=x+\dfrac{a^2}{x}$ $(a>0)$ 的导数是

$$y'=1-\frac{a^2}{x^2}.$$

当$x=\pm a$时等于零，当$x=0$时不存在．0，$\pm a$三点把数轴分为四个区间$(-\infty,\ -a)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ a)$和$(a,\ +\infty)$．

在$(-\infty,\ -a)$内$y'>0$，$y$上升；

在$(-a,\ 0)$　　内$y'<0$，$y$下降；

在$(0,\ a)$　　内$y'<0$，$y$下降；

在$(a,\ +\infty)$　内$y'>0$，$y$上升．

## 4.2 极值

前一段讨论的函数性质，主要是$f'(x)$在某一点不等于零的情形．导数等于零的情形往往和函数的极值（本章§1.1）有关系．

**定理 5** 函数$f(x)$在$x_0$点的导数$f'(x_0)$存在，并且在这$x_0$点取得极值，则$f'(x_0)=0$．

【证】 用反证法．若$f'(x_0)\neq 0$，则$f'(x_0)$或是正数，或是负数．如果$f'(x_0)>0$，根据定理 1，$f(x)$在$x_0$点应该上升，在$x_0$的右邻域里$f(x)>f(x_0)$，在左邻域里$f(x)<f(x_0)$，在

$x_0$的任何邻域里不能保持永远

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad 或 \quad f(x)\geqslant f(x_0).$$

所以$f(x_0)$不是极值，与假设相矛盾．因此$f'(x_0)$不能大于零．

同理$f'(x_0)$不能小于零．所以$f'(x_0)=0$． ▌

对于这个定理要注意两件事：第一，不要误以为$f'(x_0)=0$时，$f(x_0)$便是极值．前面举的$y=x^3$和$y=-x^3$，当$x=0$时，导数都等于零．然而这两函数当$x=0$时的值0都不是极值．第二，要注意函数在$x_0$点的导数存在．当导数不存在时，函数也可能取得极值．例如函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，当$x=0$时$f'(x)$不存在，然而从极值的定义很容易判定$f(0)=0$是极小值(图5-6)．

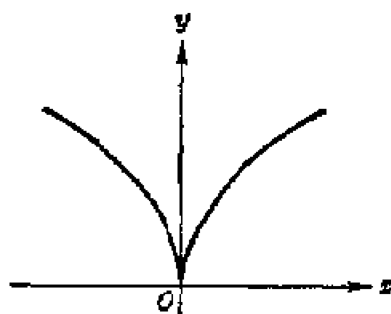


图 5-6

如此说来，$f(x_0)$是极值时，$f'(x_0)$可能存在，也可能不存在．如果$f'(x_0)$存在，必然$f'(x_0)=0$，函数的图象在$(x_0, f(x_0))$的切线必定平行于$x$轴(图5-7(a)，(b))．如果$f'(x_0)$不存在，函数图象在$(x_0, f(x_0))$的切线可能没有确定(唯一)的方向(图5-7(c)，(d))，也可能平行于$y$轴(图5-6)．

凡是使导数等于零或不存在的$x$值，称为这函数的临界点．在临界点上函数不一定取得极值；但是，$f(x_0)$是极值的

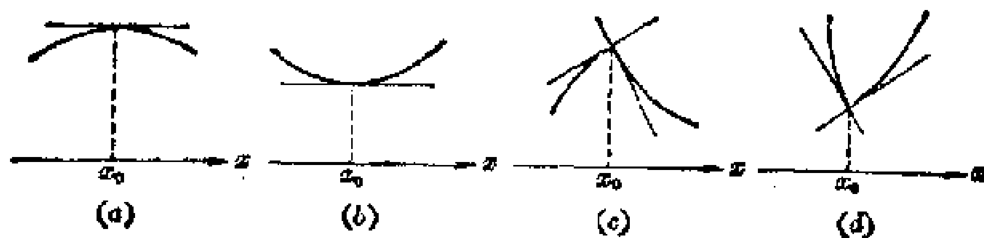


图 5-7

话，$x_0$必是临界点．实用上求极值的问题很多，求$f(x)$的极值，需要先求临界点，然后审查在哪个临界点上产生极值．已知$x_0$是临界点，问$f(x_0)$是不是极值，自然可以用极值的定义去检查，但是利用导数要省事些．

**定理 6** 假设$f(x)$在$N(x_0, \delta)$内连续，$f'(x)$在空心邻域$\mathfrak{N}(x_0, \delta)$内存在，并且在$x_0$的左右邻域里$f'(x)$的符号相反，那么$f(x_0)$是极值．如果在$(x_0-\delta, x_0)$里$f'(x)>0$，在$(x_0, x_0+\delta)$里$f'(x)<0$，那么$f(x_0)$是极大值．反之是极小值．

【证】 如果在$(x_0-\delta, x_0)$里$f'(x)>0$，在$(x_0, x_0+\delta)$里$f'(x)<0$，必然$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0)$里上升，在$(x_0, x_0+\delta)$里下降．$f(x)$在$x_0$点的左右邻域里所取得的数值都不大于$f(x_0)$，所以$f(x_0)$是极大值．

极小值的情形，证明方法与此相似． ▌

注意：定理没有说$f'(x_0)$存在与否．

【例 1】 由$f(x)=x^2$得$f'(x)=2x$，这是$x$的连续函数．令$f'(x)=0$，解得$x=0$，这是唯一的临界点．$x<0$时，$f'(x)<0$，$x>0$时，$f'(x)>0$，所以$f(0)=0$是极小值．我们知道原点是抛物线$y=x^2$的顶点．开口向上的抛物线的顶点最低．

【例 2】 设$b>0$，$f(x)=a-b(x-c)^{\frac{2}{3}}$，$f'(x)=\dfrac{-2b}{3(x-c)^{1/3}}$不能等于零，而当$x=c$时，$f'(x)$不存在．所以$c$是临界点．

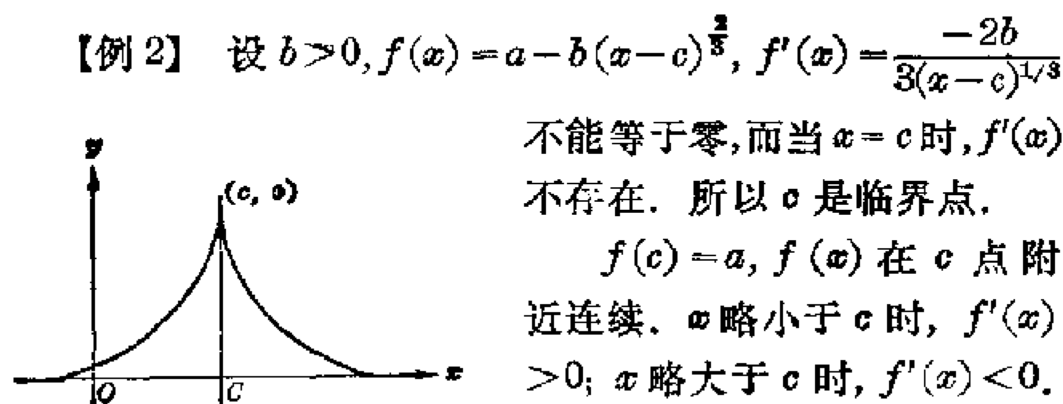


图 5-8

$f(c)=a$，$f(x)$在$c$点附近连续．$x$略小于$c$时，$f'(x)>0$；$x$略大于$c$时，$f'(x)<0$．所以$f(c)=a$是极大(图5-8)．

读者想一想，$b<0$ 时，结论如何？$a$ 与 $c$ 的符号对于极值的存在有无关系？

【例 3】 $f(x)=x^3$ 时，$f'(x)=3x^2$. 由 $f'(x)=0$ 解得临界点 $x=0$. 然而 $x<0$ 时，$f(x)<0=f(0)$；$x>0$ 时，$f(x)>0=f(0)$. 所以 $f(0)$ 不是极值.

根据定理 6，还可以推得一个判别极值的定理. 即

**定理 7** 假设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时 $f''(x)$ 存在，若

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0.$$

则 $f(x_0)$ 为极值，并且 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 是极大；$f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 是极小.

【证】 $f''(x_0)<0 \Rightarrow f'(x)$ 在 $x_0$ 点连续而且下降，但是 $f'(x_0)=0$，所以 $x$ 略小于 $x_0$ 时，$f'(x)>0$；$x$ 略大于 $x_0$ 时 $f'(x)<0$. 根据定理 6，知道 $f(x_0)$ 是极大值.

另一种情形的证明与此相仿. ▌

【例 4】 上面的例 1 里，$f(x)=x^2$，$f'(0)=2x|_{x=0}=0$，$f''(x)=2>0$. 所以 $f(0)=0$ 是极小值.

【例 5】 设 $a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，因为 $f'(x)=2ax+b$，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 是临界点，并且 $f''(x)=2a$. 所以 $a<0$ 时，$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ 是极大值；$a>0$ 时，是极小值.

定理 6 与定理 7 都可以用来探求函数的极值，而且看来用定理 7 更方便些. 但在 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 时，定理 7 就失效了，例如 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$ 都这样. 但是定理 6 仍然能用.

【例 6】 按图 5-9，把一块正方形铁皮裁去四个相同的小方角，然后沿着虚线把四个凸出的部分折起来，造成一个敞口的方盒子. 要这盒子的容积最大，问裁去的小正方形每边该

多长？(第一章§2.8例1).

解：假设原正方形边长是 $a$，所裁小正方形边长是 $x$．那么盒子底边的长是 $a-2x$，高是 $x$．再设盒子的容积是 $V$，那么

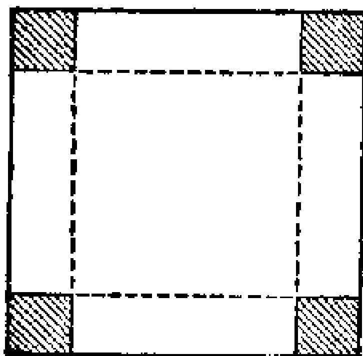


图 5-9

$$V=x(a-2x)^2,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

$$V'=(a-2x)(a-6x).$$

令 $V'=0$，求得临界点 $x=\frac{a}{2}$ 及 $x=\frac{a}{6}$．在 $x=\frac{a}{2}$ 时，$V=0$显然不是极大值．从问题的实际情况来看，确实有一个最大值．现在可取的临界点只有 $x=\frac{a}{6}$，所以 $\frac{a}{6}$ 是问题的答案．即是说裁去的小方角的边长等于原正方形边长的六分之一时，盒子的容积最大．

【例 7】 最初质量为 $m_0$ 的雨点，因重力作用而降落（不计空气阻力）．在降落过程中，雨点等速地蒸发，减少的质量与降落时间成正比．求雨点动能最大的时刻．

解：设 $M$ 为雨点随时间 $t$ 变化的质量，那么在时刻 $t$ 以前蒸发的质量是 $m_0-M$，已知雨点等速地蒸发，那么在时刻 $t$ 以前蒸发的质量又应该等于 $kt$，其中 $k$ 是常数．于是得

$$m_0-M=kt \quad 或 \quad M=m_0-kt.$$

按自由落体来说，雨点的降落速度是 $v=gt$．从物理学知道，动能 $E=\frac{1}{2}Mv^2$．由此

$$E=\frac{1}{2}(m_0-kt)(gt)^2=\frac{1}{2}g^2t^2(m_0-kt).$$

求导数，得

$$E' = \frac{1}{2} g^2 t(2m_0 - 3kt).$$

令 $E' = 0$, 求得 $t = 0$ 及 $\frac{2m_0}{3k}$.

$t = 0$时, $E = 0$, 显然不是极大值. $t$ 略小于 $\frac{2m_0}{3k}$ 时, $E' > 0$; $t$ 略大于 $\frac{2m_0}{3k}$ 时, $E' < 0$. 所以

$$E\left(\frac{2m_0}{3k}\right) = \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{2m_0}{3k}\right)^2 \left(m_0 - \frac{2m_0}{3}\right) = \frac{2g^2 m_0^3}{27k^2}$$

是极大值.

注意: 极值是局部性概念, 极大值仅是不小于它邻近的函数值, 并不是不小于一切可能的函数值. 极小值也未必不大于一切可能的函数值.

【例 8】 在 § 4.1 例题中的函数 $y = x + \frac{a^2}{x}$, 当 $x = -a$ 时是极大, 它的值是 $-2a$; 当 $x = a$ 时是极小, 它的值是 $2a$. (极大值反而小于极小值.)

不小于一切可能函数值的值, 叫做**最大值**. 不大于一切可能函数值的值, 叫做**最小值**. 最大值要从一切极大值和区间端点上的函数值中去找; 最小值要从一切极小值和区间端点上的函数值中去找. 两者都可能不存在.

比如例 8 里的函数 $y = x + \frac{a^2}{x}$ 在全数轴上既无最大值又无最小值. 如果只在区间 $(0, +\infty)$ 里考虑, 极小值 $2a$ 就是最小值, 然而还是没有最大值. 如果在区间 $\left[\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right]$ 上考虑, $x = a$ 时的函数值 $2a$ 仍然是最小值, $x = \frac{a}{2}$ 时的函数值 $\frac{5}{2}a$ 是最大值.

## 4.3 曲线的凹凸与拐点

以下只讨论单值连续函数表示的曲线. 这里说的曲线的弧(一段曲线)都限制在这样一个条件之下: 弧上任意两点的连线不能和这弧有第三个交点. 即是说只要图 5-10 和图 5-11 那样的弧, 不要图 5-12 那样的弧.



图 5-10



图 5-11

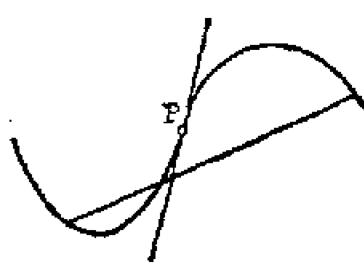



图 5-12

如果曲线在它的每点有切线, 除切点外, 弧上的每点如果都在切线的下方, 就说这弧是凸曲的(图 5-10). 如果除切点外, 弧上的点都在切线的上方, 就说这弧是凹曲的(图 5-11).

**定理 8** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 上有二阶导数 $f''(x)$; $C$ 是 $y=f(x)$ 在 $(a, b)$ 上的曲线,

(1) $C$ 在 $(a, b)$ 上凸曲 $\Rightarrow f''(x)\leqslant 0,\ x\in(a, b)$;

(2) $C$ 在 $(a, b)$ 上凹曲 $\Rightarrow f''(x)\geqslant 0,\ x\in(a, b)$.

【证】 假设 $x_0\in(a, b)$, $x_0+\Delta x\in(a, b)$. 函数的增量是

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

在 $(x_0, f(x_0))$ 点的切线的增量(第四章 §5.2)是

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta y-dy&=[f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)]\Delta x\\&=f''(x_0+\theta_1\Delta x)\theta(\Delta x)^2 \quad (0<\theta_1<\theta).\end{aligned}$$

因为 $\theta(\Delta x)^2>0$，所以 $\Delta y-dy$ 与 $f''(x_0+\theta_1\Delta x)$ 同号.

(1) $C$ 凸曲 $\Rightarrow \Delta y-dy\leqslant 0\Rightarrow f''(x_0+\theta_1\Delta x)\leqslant 0$;

(2) $C$ 凹曲 $\Rightarrow \Delta y-dy\geqslant 0\Rightarrow f''(x_0+\theta_1\Delta x)\geqslant 0$.

因为 $x_0$ 是 $(a, b)$ 内的任意一点，那么定理得到证明. ▌

**定理 9** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内有二阶导数 $f''(x)$，$C$ 是 $y=f(x)$ 在 $(a, b)$ 上的曲线，

(1) $f''(x)<0,\ x\in(a, b)\Rightarrow C$ 在 $(a, b)$ 上凸曲;

(2) $f''(x)>0,\ x\in(a, b)\Rightarrow C$ 在 $(a, b)$ 上凹曲.

证明很容易，留作习题，读者自证.

定理 8、9 是辨别曲线凹凸的根据.

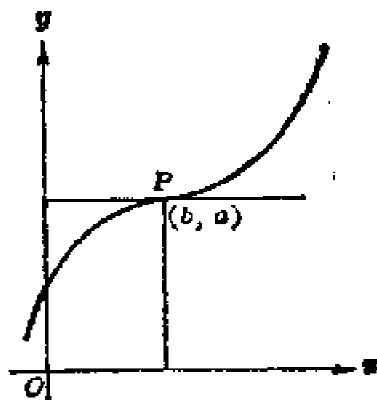



图 5-13

【例 1】 试就 $y=a+(x-b)^3$，求曲线的凹凸部分(图 5-13).

解：从所给方程求得

$$y''=6(x-b).$$

$x>b\Rightarrow y''>0\Rightarrow$ 曲线在 $b$ 点之右凹曲;

$x<b\Rightarrow y''<0\Rightarrow$ 曲线在 $b$ 点之左凸曲.

平滑曲线上凹凸部分的分界点，叫做拐点. 图 5-12 及图 5-13 的 $P$ 都是拐点. 在拐点两旁，$f''(x)$ 的符号相反. 如果 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，而且 $f''(x)$ 连续，那么 $f''(x_0)=0$，并且 $f'(x)$ 在 $x_0$ 的两旁升降不同，$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极值. 仿照求 $f(x)$ 的极值的方法，可以推想到求拐点及凹凸区间的方法.

方法一：设曲线的方程是 $y=f(x)$. $x_0$ 是定义域的一点，$f''(x_0)=0$，在 $x_0$ 的两近旁 $f''(x)$ 正负不同，则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点；在 $x_0$ 的两近旁 $f''(x)$ 的正负相同，则 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

当 $x$ 逐渐增加地经过 $x_0$ 时，如果 $f''(x)$ 先负后正，曲线便在 $x_0$ 的左旁凸曲，右旁凹曲；如果 $f''(x)$ 先正后负，曲线便在 $x_0$ 的左旁凹曲，右旁凸曲.

方法二：假设 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,\ f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．若 $f'''(x_0)>0$，则曲线在 $x_0$ 的左旁凸曲，右旁凹曲；若 $f'''(x_0)<0$，则曲线在 $x_0$ 的左旁凹曲，右旁凸曲.

【例 2】 已知曲线方程为 $y=\ln(x^2+1)$．现在用以上所讲的两种方法辨别曲线的凹凸.

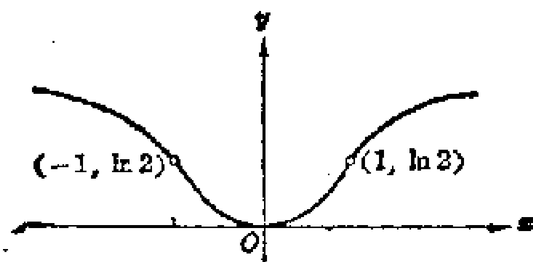


图 5-14

先求得

$$y''=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

令 $y''=0$，解得 $x=\pm 1$.

按方法一：$x<-1$ 时，$y''<0$；$-1<x<1$ 时，$y''>0$；$x>1$ 时，$y''<0$．由此知道 $(-1,\ \ln 2)$ 及 $(1,\ \ln 2)$ 都是拐点．曲线在区间 $(-\infty,\ -1)$ 及 $(1,\ +\infty)$ 内凸曲，在区间 $(-1,\ 1)$ 内凹曲(图 5-14).

按方法二：再求得 $y'''=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.

$$y'''|_{x=-1}=1>0,\quad y'''|_{x=1}=-1<0,$$

所以 $(\pm 1,\ \ln 2)$ 都是拐点.

【例 3】 $f(x)=x^4$ 时，$f''(x)=12x^2$，$f''(0)=0$．但是在 $x=0$ 的两旁 $f''(x)$ 符号相同，所以原点不是曲线 $y=x^4$ 的拐点.

【例 4】 $\varphi(x)=x^5$，这时 $\varphi''(x)=20x^3$，$\varphi'''(x)=60x^2$，$\varphi''(0)=\varphi'''(0)=0$，不能用方法二判断．但是 $\varphi''(x)$ 当 $x<0$ 时是负数，$x>0$ 时是正数，所以原点是曲线 $y=x^5$ 的拐点.

以上说的是 $f''(x_0)$ 存在的情形．如果 $f''(x_0)$ 不存在，那

么首先看$f(x_0)$是否有定义．假若$f(x_0)$无定义，曲线在$x=x_0$时便没有拐点．但曲线在$x_0$的两旁仍有凹凸问题可以检查；假若$f(x_0)$有定义，便应该按方法一检查．

【例 5】 由$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$求得

$$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}.$$

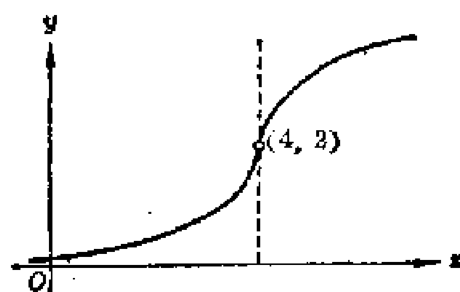



图 5-15

当$x=4$时，$y'$及$y''$都不存在．然而$y$当$x=4$时连续，$x<4$，则$y''>0$；$x>4$，则$y''<0$. 因此曲线有拐点(4, 2)(图5-15)．

## 4.4 函数性态的一般检查法

前面检查函数的升降和曲线的凹凸，只用到一阶及二阶导数．这是较为基本的也是用得最多的方法．如果用泰勒公式，还可以更一般地讨论这些性质．以前讲的那些都是这方法的特例．我们先说函数的升降．

假设函数$f(x)$在$x_0$点的邻域里有一阶到$n+1$阶连续的导数，并且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而$f^{(k)}(x_0)\neq0$，其中$k\leqslant n$．则由泰勒公式，得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\Delta x^k+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)\Delta x^{k+1}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

$$=f^{(k)}(x_0)\Delta x^k\left[\frac{1}{k!}+Q(x_0)\Delta x\right]$$

其中

$$Q(x_0)=\left[\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^{n-k}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{n-k+1}\right]\Big/f^{(k)}(x_0).$$

当 $\Delta x$ 很小时，$\frac{1}{k!}+Q(x_0)\Delta x$ 与 $\frac{1}{k!}$ 同号，是正数．这时函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 与 $k$ 阶微分 $f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 同号．下边按 $k$ 的奇偶性来讨论 $\Delta y$ 的正负．

1．$k$ 是奇数

$\Delta x^k$ 与 $\Delta x$ 同号，$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 随着 $\Delta x$ 而变号．

$f^{(k)}(x_0)>0$ 时，$\Delta x$ 若由负变正，$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 也由负变正．$\Delta y$ 在 $x_0$ 之左是负数，在 $x_0$ 之右是正数，所以 $f(x)$ 在 $x_0$ 点上升．

$f^{(k)}(x_0)<0$ 时，$\Delta x$ 若由负变正，$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 由正变负，所以 $f(x)$ 在 $x_0$ 点下降．

2．$k$ 是偶数

$\Delta x^k>0$，$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 在 $x_0$ 的近旁不变号．

$f^{(k)}(x_0)>0$，则 $\Delta y$ 在 $x_0$ 的邻域里总是正数，$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$，所以 $f(x_0)$ 是极小．

$f^{(k)}(x_0)<0$，则 $\Delta y$ 在 $x_0$ 的邻域里总是负数，$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$，所以 $f(x_0)$ 是极大．

总结起来，即得函数升降及极值的一般检验法如下表：

| $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ | | |
|---|---|---|
| $k$ | $f^{(k)}(x_0)$ | $f(x)$ |
| 奇 | $+$ | 在 $x_0$ 点上升 |
| | $-$ | 在 $x_0$ 点下降 |
| 偶 | $+$ | 有极小值 $f(x_0)$ |
| | $-$ | 有极大值 $f(x_0)$ |

现在转来讨论函数曲线的凹凸．设曲线方程是 $y=f(x)$，并假设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数． $x_0$ 是定义域里的一点．那么依照泰勒公式，有

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

又知曲线在 $(x_0, f(x_0))$ 点的切线方程是

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

两式相减，得曲线与切线上对应纵坐标之差

$$f(x_0+\Delta x)-y=\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

假若 $f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$，$k\leqslant n$，则

$$f(x_0+\Delta x)-y=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\Delta x^k+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{n+1}.$$

由前面的讨论知道，$\Delta x$ 很小时 $f(x_0+\Delta x)-y$ 与 $f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 同号．下面根据 $k$ 的奇偶性分析曲线的凹凸：

1．$k$ 是偶数

这时 $\Delta x^k>0$．$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 与 $f^{(k)}(x_0)$ 同号，所以

$f^{(k)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0+\Delta x)-y>0$，在 $x_0$ 的邻域里曲线在切线的上方，从而曲线是凹的．

$f^{(k)}(x_0)<0$ 时，曲线在 $x_0$ 的邻域里是凸的．

2．$k$ 是奇数

不论 $f^{(k)}(x_0)$ 是正数或是负数，$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$ 总跟着 $\Delta x$ 改变符号．所以曲线在切点 $(x_0, f(x_0))$ 的两旁一定分居于切线的两侧，$(x_0, f(x_0))$ 是拐点．

总括起来又得到曲线凹凸及拐点的一般检验法如下表：

| $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，$f^{(k)}(x_0)\neq 0$ | | |
|---|---|---|
| $k$ | $f^{(k)}(x_0)$ | 曲　　线 |
| 偶 | $+$ | 在 $x_0$ 的邻域里凹曲 |
| | $-$ | 在 $x_0$ 的邻域里凸曲 |
| 奇 | $\neq 0$ | 有拐点 $(x_0, f(x_0))$ |

【例 1】　检查 $f(x)=2x^6-x^3+3$ 在点 $x=0$ 时的性态．

解：
$$f'(x)=2\cdot 6x^5-3x^2,\qquad f'(0)=0;$$
$$f''(x)=2\cdot 6\cdot 5x^4-3\cdot 2x,\qquad f''(0)=0;$$
$$f'''(x)=2\cdot 6\cdot 5\cdot 4x^3-3\cdot 2,\qquad f'''(0)=-6.$$

由于第三阶导数首先不等于零，它的值是负数，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 时下降．曲线上的点 $(0, 3)$ 是拐点．

【例 2】　检查 $f(x)=6\ln x-2x^3+9x^2-18x$ 在 $x=1$ 时的性态．

解：
$$f'(x)=\frac{6}{x}-6x^2+18x-18,\qquad f'(1)=0;$$
$$f''(x)=\frac{-6}{x^2}-12x+18,\qquad f''(1)=0;$$
$$f'''(x)=\frac{12}{x^3}-12,\qquad f'''(1)=0;$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{36}{x^4},\qquad f^{(4)}(1)=-36.$$

由于四阶导数首先不等于零，它的值是负数．所以 $x=1$ 时，

$f(x)$有极大，极大值是 $f(1)=-11$. 同时知道曲线在$(1, -11)$附近是凸曲的.

## 习 题 四

1. 求下列函数的单调区间:

   (1) $y=(x-2)^5(2x+1)^4$;  (2) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

   (3) $y=x-e^x$;  (4) $y=2x^2-\ln x$;

   (5) $y=x+\cos x$.

2. 求下列函数的极值:

   (1) $y=2x^3-3x^2$;  (2) $y=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$;

   (3) $y=x^2e^{-x}$;  (4) $y=\cos x+\sin x$;

   (5) $y=e^x\sin x$.

3. 对于下列各函数，在指定的区间上求最大值和最小值:

   (1) $y=x+2\sqrt{x}\quad(0\leqslant x\leqslant 4)$;

   (2) $y=\sqrt{100-x^2}\quad(-6\leqslant x\leqslant 8)$;

   (3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 4)$;

   (4) $y=\sin 2x-x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$;

   (5) $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x\quad\left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 对于下列各函数的图象，求它们的拐点及凹凸区间:

   (1) $y=(x+1)^4+e^x$;  (2) $y=\ln(x^2+1)$;

   (3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;  (4) $y=\operatorname{tg}x$;

   (5) $y=xe^{-x}$.

5. 全面讨论下列各函数，并画它们的图象:

   (1) $y=x^4-2x+10$;  (2) $y=e^{-1/x}$;

   (3) $y=3x^5-5x^3$;  (4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

   (5) $y=\ln(x^2+1)$.

6. 体积为 $V$ 的正三棱柱的底边多长时，总面积最小?

7. 设有半径为 $R$ 的球，内接于球的圆柱体体积最大时，高为多少?

8. 把一盏灯挂在半径为 $R$ 的圆形广场中心，问灯离地面多高时才能使广场周围路上照得最亮?(灯光亮度与光线投射角的余弦成正比，与光源距离的平方成反比．光线的投射角是通过灯的铅垂线与光线的夹角)．

9. 设有重量为 $P=5$ 公斤的物体放在水平平面上，受力 $F$ 的作用而移动(图 5-16)，已知摩擦系数为 $\mu=0.25$．现在要 $F$ 最小(刚刚能拉动这物体)，问 $F$ 与水平线的交角 $\alpha$ 应为多少?

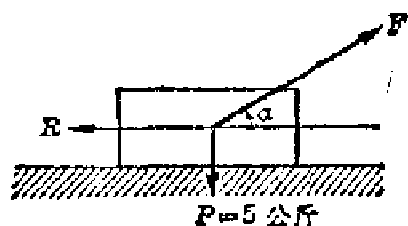



图 5-16

## 第五章小结

第一节四条定理的理论，一个接着一个，一个比一个深入．继续发展下去，应该说第三节的泰勒公式才达到了中值定理的最后阶段．

第二节洛比达法则，是从柯西定理派生的．因为它对于求极限特别有用，所以不惜把中值定理的整体打断，放在泰勒公式之前，好让它和柯西定理衔接．虽然§3.2引入泰勒公式时用到了洛比达法则，却不是非如此不可．

实际中遇到的函数，往往非常复杂．如何用简单函数表示复杂函数，是一个急待解决的问题．什么函数简单?多项式最简单．为了用多项式逼近一个函数，就产生了带有普遍意义的泰勒公式．这是第三节仅有的一个内容．这里我们看到了

如何用 $x$ 的多项式近似地代替 $\sin x$, $\cos x$, $e^x$ 的方法.

泰勒公式的余项是核验泰勒多项式可靠程度的工具. 拉格朗日余项可以解决大部分问题, 但对于不少函数它的力量显得不够, 本书限于篇幅, 不能一一列举其他形式的余项.

第四节讨论函数的性质, 是第四、第五两章知识的应用, 其中牵涉到一些几何知识, 即是关于图象的知识. 这项工作, 下一章还要继续讨论.

# 第六章

# 导数的应用

微积分是研究变量的一门数学,大致可以说,凡属变化现象都可能是微积分的研究对象. 有许多函数现象,不能用适当方法表示,因而不能用微积分讨论;可是能用微积分讨论的函数现象还是很多很多的. 既然微分法的应用甚广,我们就不可能把它们都逐一列举,而只能选其重要的几个方面略加解说而已.

在前一章函数的讨论中,已经涉及了一点几何问题. 本章一开始还要在函数的图象方面继续讨论. 接着再讨论一下曲率.

方程的近似解法很多,这里只讲与导数密切相关的解法.

导数在物理、化学和工程技术里都要用到,尤其在物理上的应用最多. 知道了物理上的用法,一旦碰到其他方面的问题,自然会借一反三,所以这里只结合物理方面的典型例子讲一点应用.

## 第一节 函数的图象

函数的图象是函数的直观表示,可以使函数的各种性态一目了然,对于函数的研究有很大的帮助. 以前作函数的图象主要靠描点,而描点法难免漏掉一些带有关键性的点(如拐点),或者不能准确地找到这样的点,例如极值的点. 有了导数之后,就可以很精确地解决这些问题了.

## 1.1 讨论曲线的一般程序

作函数图象时，如果先知道函数的一些性态，作图就容易些，也正确些．所以作图之前应当将函数讨论一下．现在我们有了便利的工具——导数，比第一章的讨论自然要精确得多．讨论的程序大体如下：

1．由函数的定义域或它的表达式确定图象的

(1) 范围；

(2) 间断点及连续区间(见第三章§3.3, §3.4)；

(3) 零点及同号区间(见第一章§2.9)；

(4) 对称轴及对称中心，周期性(见第一章§2.9)

2．由一阶导数确定图象的

(1) 单调区间(见第一章§2.9)；

(2) 临界点(见第五章§4.2)．

3．由二阶导数确定图象的

(1) 凹曲或凸曲(见第五章§4.3)；

(2) 拐点(见第五章§4.3)．

以上列举的这些条款，仅是一般应该注意的几点．对于个别问题，上述事项有的可以省略，程序也可以变更．但应该知道，虽然讨论了这些性态，也不是说已经做完了作图的准备．有些性态还有待于更多的知识．

## 1.2 图象的画法

现在举几个例题，按照上述条款逐步研究函数的性态，同时逐步添设函数的图象．

【例1】 作 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图象．

解：这是有理分式函数．除去 $x=-1$ 这一点间断以外，处处有定义．所以它的连续区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, +\infty)$，并且在 $(-\infty, -1)$ 内 $y<0$，在 $(-1, +\infty)$ 内 $y>0$．令 $x=0$，得 $y=0$，这是唯一的零点．将原方程变作 $x$ 的二次方程

$$x^2-xy-y=0,$$

它的判别式 $y^2+4y=y(y+4)$，当 $-4<y<0$ 时是负数，$x$ 是复数；所以曲线不能侵入 $y=-4$ 与 $y=0$ 两直线之间．

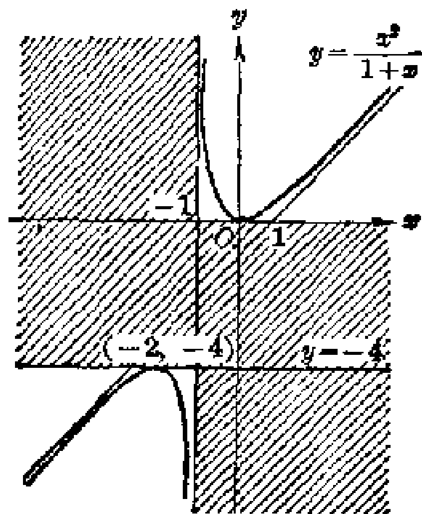


图 6-1

把曲线不能达到的区域画上阴影线．首先是 $y=-4$ 与 $y=0$ 之间的部分．其次 $x<-1$ 时，$y<0$，曲线在直线 $x+1=0$ 之左不能伸入 $x$ 轴之上，所以直线 $x+1=0$ 以左，$x$ 轴以上的部分也画上阴影线．同理直线 $x+1=0$ 以右，$y=-4$ 以下的部分也画上阴影线(图 6-1)．特别标出曲线的零点 $(0, 0)$．一阶导数

$$y'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$$

当 $x=-2$ 及 $0$ 时等于零．在 $(-\infty, -2)$ 内 $y'>0$，$y$ 上升；在 $(-2, -1)$ 内 $y'<0$，$y$ 下降，因而在点 $(-2, -4)$ 达到极大．又在 $(-1, 0)$ 内 $y'<0$，$y$ 下降；在 $(0, +\infty)$ 内 $y'>0$，$y$ 上升，因而在点 $(0, 0)$ 达到极小．

$\lim\limits_{x\to-1+} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-1-} y=-\infty$．这时 $x=-1$ 是渐近线．在图上画出渐近线 $x=-1$，并标出点 $(-2, -4)$ (图 6-1)．

二阶导数是

$$y''=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

在$(-\infty,\ -1)$内$y''<0$，图象凸曲；在$(-1,\ +\infty)$内$y''>0$，图象凹曲．$y''$不能等于零，没有拐点．

把以上讨论的结果汇集成一个表，可以使绘图工作更加方便．

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y''$ | | $-$ | $-2$ | $-$ | $\mp\infty$ | $+$ | $2$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $\mp\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| 曲线性态 | | 上升 | 极大 | 下降 | | 下降 | 极小 | 上升 | |
| | | 凸曲 | | | | 凹曲 | | | |

根据以上讨论，绘成曲线如图 6-1 所示．

【例 2】 已知$c>0$，试作悬链线$y=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})$的图象．

解：这函数在整个数轴上有定义，所以曲线在左右两方没有限制．我们知道任何正实数$a$，都满足不等式$a+a^{-1}\geqslant 2$，所以

$$\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})\geqslant\frac{c}{2}\times 2=c.$$

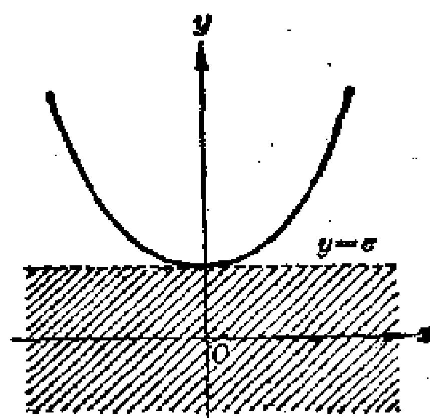



图 6-2

那么曲线一定在直线$y=c$之上．（随即在坐标纸上将$y=c$之下的半平面画上阴影线）．因此函数没有零点．

$$y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}})$$

由 $y'=0$, 解得 $x=0$. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内 $y'<0$, 曲线下降; 在 $(0, +\infty)$ 内 $y'>0$, 曲线上升. 因而在 $(0, c)$ 点达到极小.

$$y''=\frac{1}{2c}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)>0 \quad (-\infty<x<+\infty).$$

所以曲线凹曲. 没有拐点.

从以上讨论的结果 (读者仿照例 1 作一个表) 绘成图象, 如图 6-2.

以上的讨论都是按笛卡儿坐标说的. 但也可以借它来讨论极坐标方程的曲线; 尤其是上升、下降、极大、极小的理论可以很方便地使用.

【例 3】 作心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$.

解: 这是 $\theta$ 的偶函数, 图象关于极轴对称. 一切 $\theta$ 值使 $r$ 存在, 曲线布满 $O$ 的四周.

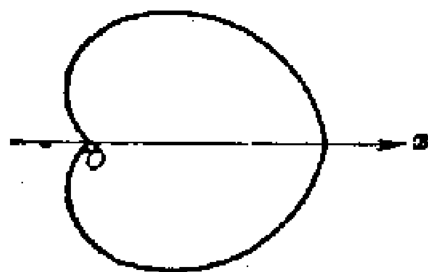


图 6-3

$$|r|=a|1+\cos\theta|\leqslant 2a,$$

曲线不能越出圆 $r=2a$ 之外.

$r'=-a\sin\theta$, 令 $r'=0$, 解得 $\theta=0$ 或 $\pi$. 当 $\theta$ 由小而大地通过 0 时, $r'$ 由正变负, 这时 $r=2a$ 是极大(点离极最远). 当 $\theta$ 由小而大地通过 $\pi$ 时, $r'$ 由负变正, 此时 $r=0$ 是极小.

由方程 $r=a(1+\cos\theta)$ 很容易得到 $r$ 的变化规律: $0<\theta<\pi$ 时, $r'<0$, $r$ 递减. $\theta$ 由 0 增大至 $\frac{\pi}{2}$ 时, $r$ 由 $2a$ 减小到 $a$; $\theta$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 再增到 $\pi$ 时, $r$ 由 $a$ 再减小到 0. $\theta$ 由 $\pi$ 增至 $2\pi$ 的情形, 可以从曲线的对称性推想(图 6-3).

## 1.3 渐近线

画函数的图象时, 常常要遇到渐近线. 本来讨论曲线应

该把渐近线列为一项．因为以前本书未曾正式研究这问题，所以没有列入§1.1的程序之内．但是我们已经对于渐近线有些感性认识：例如$y=0$是$y=e^{ax}$的渐近线；$x=0$是$y=\log_a x$的渐近线；$bx\pm ay=0$是双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$的渐近线(见数理化自学丛书《平面解析几何》第四章)这都是我们已知道的．本章前段例1已经说明了$x=-1$是渐近线，其实还有一条渐近线

$$y=x-1,$$

当时由于还不知道求它的方法，所以没有提出来．

**定义** 能伸展到无穷远的曲线，如果沿着它向无穷远移动的点，到某条定直线$L$的距离以零为极限．$L$就叫做这曲线的渐近线．

动点$(x, y)$向无穷远移动有三种可能：一种是$x\to\infty$而$y$趋于有限数；一种是$x$趋于有限数，而$y\to\infty$；再一种是$x$、$y$都趋于无穷．对应于这三种情形的渐近线，第一种是横渐近线(如$y=e^{ax}$的渐近线$y=0$)；第二种是纵渐近线(如$y=\log_a x$的渐近线$x=0$)；第三种是斜渐近线(如$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$的渐近线$bx\pm ay=0$)．分别讨论如下：

1．横渐近线

假设曲线$C$的方程是

$$y=f(x),$$

如果$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，等于某常数$k$，那么直线

$$y=k$$

是$C$的横渐近线．理由是$C$上动点$(x, f(x))$到直线$y=k$的距离是$f(x)-k$，而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-k]=0.$$

【例 1】 求 $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ 的横渐近线.

解：直接从函数表达式的结构可以看出来

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1.$$

所以 $y=1$ 是所求的渐近线(图 6-4).

求得渐近线方程以后，还需要观察曲线怎样地逼近这渐近线. 就本例来说，曲线是从直线 $y=1$ 的上方逼近它呢？还是从下方逼近它呢？这要看 $|x|$ 很大时 $\frac{x^2}{x^2-1}$ 比 1 大还是小. 现在显然当 $|x|>1$ 时，$\frac{x^2}{x^2-1}>1$. 这说明在左右两方曲线都从 $y=1$ 的上方逼近它.

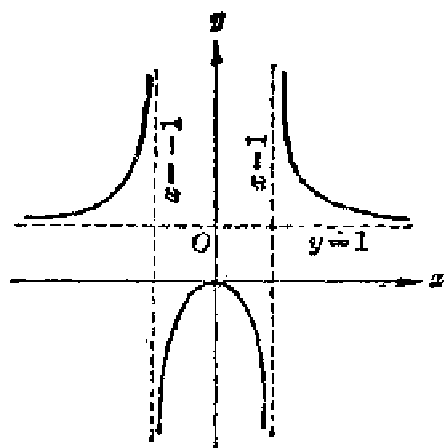


图 6-4

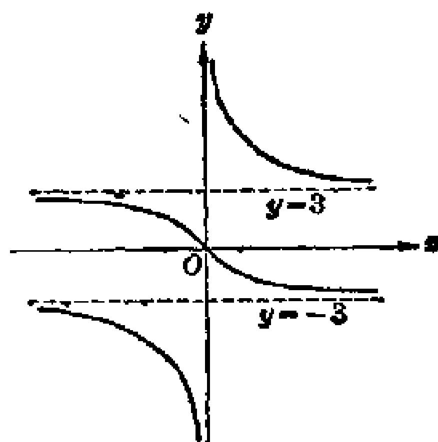


图 6-5

【例 2】 求 $x=\frac{y}{y^2-9}$ 的横渐近线.

解：将所给方程变为

$$xy^2-y-9x=0,$$

解 $y$，得

$$y=\frac{1\pm\sqrt{36x^2+1}}{2x}.$$

然后求 $x\to\infty$ 时的极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1\pm\sqrt{36x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\pm\sqrt{9+\frac{1}{4x^2}}\right)=\pm3.$$

那么 $y=\pm3$ 是两条横渐近线(图 6-5).

处理这样的问题在技术上可以不必如此麻烦，实际上直接从所设方程看 $y$ 取什么值时，$x=\infty$ 即可. 这样立刻就知道 $y=\pm3$ 时，$\frac{y}{y^2-9}$ 变为无穷. $y=\pm3$ 便是横渐近线.

2. 纵渐近线

从理论上说求

$$y=f(x)$$

的纵渐近线，应当从反函数 $x=\varphi(y)$ 看 $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)$ 是否存在. 假设有一个极限 $h$，那么 $x=h$ 便是纵渐近线. 上边例 2 恰好是这种形式的函数，由

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y}{y^2-9}=0,$$

所以 $x=0$ 是纵渐近线.

也可以直接从 $f(x)$ 观察，能使 $f(x)$ 变成 $\infty$ 的 $x$ 值 $h$，就决定纵渐近线 $x=h$，比如例 1 有两条纵渐近线 $x=1, x=-1$ (见图 6-4).

3. 斜渐近线

曲线

$$y=f(x)$$

的一个无穷远分枝，如果有斜渐近线

$$y=ax+b \tag{1.1}$$

的话，这枝曲线的方向必渐趋稳定，最后的方向(无穷远处的方向)即是渐近线的方向. 求斜渐近线应当先确定它的方向，根据渐近线的定义:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0, \qquad (1.2)$$

由此

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0,$$

无疑地 $\frac{b}{x}\to 0$，因而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a.$$

所以渐近线存在时，它的斜率 $a$ 必须是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

如果这极限存在，就表示曲线在 $\operatorname{arc\,tg} a$ 的方向上趋于无穷远.

从例 1 的函数 $y=\frac{x^2}{x+1}$，求得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1.$$

这说明曲线在斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的方向上趋于无穷远. 又如从抛物线 $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}$（图 6-6），求得

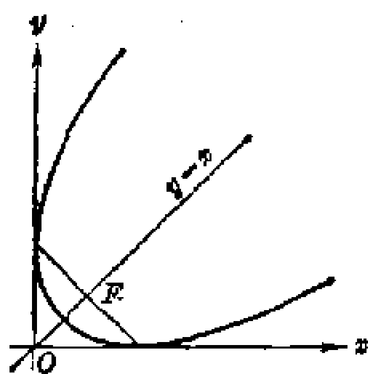


图 6-6

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a}{x}=1.$$

所以这抛物线也在斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的方向上趋于无穷.

曲线尽管在某一个方向上趋于无穷远，却未必有这样方向的渐近线. 方才的例 1 有斜率为 1 的渐近线；而抛物线 $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}$ 却没有——抛物线是没有渐近线的. 所以求得了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

以后，还需要进一步试探，即是看看在直线系（以 $b$ 为参数）

$$y=ax+b$$

中有没有一条直线是渐近线，也就是说有没有一个 $b$ 满足(1.2)．如果这样的 $b$ 存在，(1.1)就是渐近线；若 $b$ 不存在，就没有斜率为 $a$ 的渐近线．

(1.2)成立 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$．

可见有无合用的 $b$，取决于 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$是否存在．如果这极限存在，它就是 $b$．

已经知道例1的曲线在 $\frac{\pi}{4}$ 的方向上趋于无穷远，然后在直线系

$$y=x+b \tag{1.3}$$

中试探有无渐近线．

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1.$$

所以 $b=-1$，代入(1.3)，即得渐近线

$$y=x-1.$$

再从抛物线来看：假若抛物线 $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}$ 有斜率为1的渐近线，那么(1.3)里的 $b$ 就应该是 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}-x)$．但是这极限不存在，所以没有斜渐近线．

总括来说，试探斜渐近线，应该遵循以下步骤：

第一：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$．如果这极限不存在，就没有斜渐近线；如果有极限 $a$，才可能有形式为 $y=ax+k$ 的渐近线．

第二：求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$．如果这极限不存在，便没有

斜率为 $a$ 的渐近线；如果有极限 $b$，则 $y=ax+b$ 为渐近线.

$y=f(x)$ 的渐近线，可能因 $x\to+\infty$ 或 $-\infty$ 而不同，应当分别讨论. 曲线的无穷远分枝与其渐近线的相关位置，决定于 $f(x)-ax-b$ 在 $N(\infty, R)$ 内的正负.

【例 3】 设 $a>0$，求曲线 $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$ 的斜渐近线.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x-a}}=1.$

$$y-x=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-a})}{\sqrt{x-a}}$$

$$=\frac{ax}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})}=\frac{a}{2}.$$

可见曲线有斜渐近线

$$y=x+\frac{a}{2}. \tag{1.4}$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x-\frac{a}{2}=\frac{ax}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})}-\frac{a}{2}$$

$$=a\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}\right)}-\frac{1}{2}\right)>0,$$

因此知道直线(1.4)总在曲线的下方(图 6-7).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}\sqrt{\frac{x}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x}{x-a}}\right)=-1.$$

下边求

$$\lim_{x\to-\infty}[y-(-x)]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x\right),$$

为了计算上方便，令 $x=-x'$，$x'>0$，这样便有

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x=\sqrt{\frac{x'^3}{x'+a}}-x'=\frac{x'(\sqrt{x'}-\sqrt{x'+a})}{\sqrt{x'+a}}$$

$$=\frac{-ax'}{\sqrt{x'+a}\,(\sqrt{x'}+\sqrt{x'+a})},$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x'\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x'^3}{x'+a}}-x'\right)=-\frac{a}{2}.$$

这就证明了曲线有斜渐近线

$$y=-x-\frac{a}{2}. \qquad (1.5)$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-\left(-x-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}+\left(\sqrt{\frac{x'^3}{x'+a}}-x'\right)$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{ax'}{\sqrt{x'+a}\,(\sqrt{x'}+\sqrt{x'+a})}.$$

由于

$$\frac{x'}{\sqrt{x'+a}\,(\sqrt{x'}+\sqrt{x'+a})}<\frac{1}{2}\quad(x'>0),$$

所以

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-\left(-x-\frac{a}{2}\right)>0.$$

可见直线(1.5)总在曲线的下方.

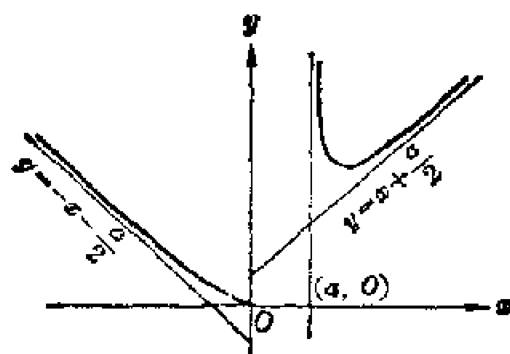



图 6-7

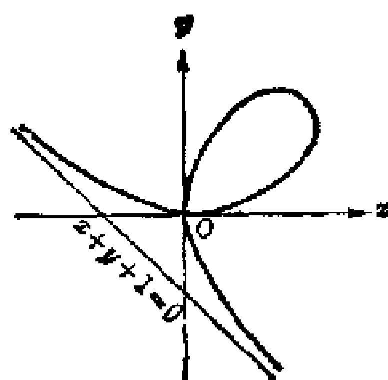



图 6-8

【例 4】 求蔓叶线 $x^3+y^3=3axy$ 的渐近线(图 6–8).

解：若是照前面讲的两种方法求渐近线，便要解三次方程，这很麻烦.但是我们已经知道蔓叶线的参数方程

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

现在利用这方程来求斜渐近线.

当 $t\to-1$ 时，$x\to\infty$，$y\to\infty$，

$$\lim_{t\to-1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\Big/\frac{3at}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1}t=-1.$$

这表示可能有斜率为 $-1$ 的渐近线

$$y=-x+b.$$

$$\lim_{t\to-1}[y-(-x)]=\lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right)$$

$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a.$$

所以 $b=-a$，从而 $y+x+a=0$ 是斜渐近线.

## 习 题 一

讨论下列曲线然后作图．有渐近线的情况，求其渐近线方程，并讨论曲线对于渐近线的位置关系：

1. $y=3x^4-4x^3+1$.
2. $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$.
3. $y=\frac{6x}{1+x^2}$.
4. $y=x(x-2)^2(x+4)^2$.
5. $4y+x^3-3x^2+4=0$.
6. $x^3y-8y-x^3=0$.
7. $y=24x^2-x^4$.
8. $x=2y^3-y^4$.
9. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,tg}x$.
10. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

## 第二节　曲　　率

一条曲线转弯的速度，一般处处不同．比如螺线就是这样．唯有圆的转弯速度处处一样．函数的变率只有一次函数的变率是均匀的，其他都是不均匀的．但是在很小的范围里，可以用直线的变率代替曲线的变率，来研究复杂问题．研究曲线的弯曲也是这样，在很小的范围里可以用圆的弯曲代替曲线的弯曲．这就是本节讨论的内容．

### 2.1　弧的微分

弧的微分是曲线弧长增量的近似值．弧长是相当复杂的概念，要用积分的理论才能解释．有了弧长的定义，才可以讨论弧长的变化．所以现在提出弧长的微分问题，不能根本解决．下边只就光滑曲线讨论这问题．对于这种曲线，首先需要承认一个原理：

趋于零的弧长与对应的弦长之比以1为极限．以前讲过的圆的弦与弧之比的极限定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

就是这原理的特例．

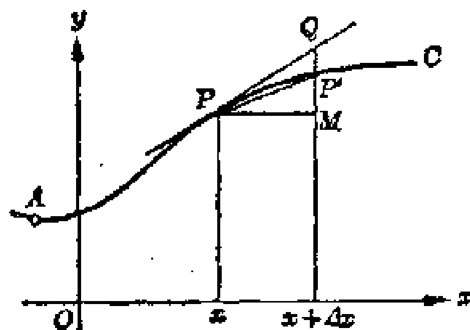



图　6-9

假设曲线 $C$（图 6-9）的方程是 $y=f(x)$，而且 $f'(x)$ 连续，即是说曲线是“光滑”的．在 $C$ 上取一点 $A$ 作为量弧的起点．每指定一个 $x$ 值，$C$ 上便有一点 $P(x, y)$ 与之对应．于是有一段弧 $\widehat{AP}$，这弧有长度 $s$．可见 $s$ 是 $x$ 的函数．现在求 $s$ 因 $x$ 而变的变率 $\dfrac{ds}{dx}$．

令 $x$ 取增量 $\Delta x(=PM)$，$C$ 上对应于 $x+\Delta x$ 的点是 $P'$，函数有对应的增量 $\Delta y(=MP')$. $s$ 的对应增量是 $\Delta s=\widehat{PP'}$. 从勾股定理知道

$$PP'=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

现在

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\widehat{PP'}}{\Delta x}=\frac{\widehat{PP'}}{PP'}\cdot\frac{PP'}{\Delta x}=\frac{\widehat{PP'}}{PP'}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\widehat{PP'}$ 与 $PP'$ 都趋于零，$\dfrac{\widehat{PP'}}{PP'}\to 1$. 所以

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{2.1}$$

假若 $C$ 的方程是 $x=\phi(y)$，同样可以证得

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{2.2}$$

这两个公式还可以统一成

$$ds^2=dx^2+dy^2,\quad 或\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{2.3}$$

所以

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x'^2}\,dy,$$

其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$，$x'=\dfrac{dx}{dy}$.

假若切线 $PQ$ 的斜角是 $\alpha$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$，由公式(2.1)、(2.2)得

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha. \tag{2.4}$$

第四章§5.2说过，当 $\Delta x$ 很小时，取 $dy$ 代替 $\Delta y$ 无异于取切线代替曲线，那时说曲线的纵坐标和切线的纵坐标只差一个高阶无穷小. 现在这里的 $\widehat{PP'}$ 的长和切线上相应的线段 $PQ$ 的长，也只差一个高阶无穷小. 这因为从公式(2.3)

来看，

$$ds=\sqrt{PM^2+MQ^2}=PQ,$$

所以

$$\widehat{PP'}-PQ=\Delta s-ds=o(\Delta x).$$

## 2.2 曲率

假设有 $C$, $C'$ 两个圆，$C$ 的半径较大，$C'$ 的半径较小，又有两个动点 $P$, $P'$ 按同样的线速度分别在 $C$, $C'$ 上移动．我们会觉得 $P$ 转弯慢一点，$P'$ 转弯快一些．这因为$P$、$P'$ 走一样长的弧时，$P$ 点的方向改变得少些，$P'$ 的方向改变得多一些．平常说 $C$ 弯曲的程度比 $C'$ 弯曲的程度小就是这个原因．

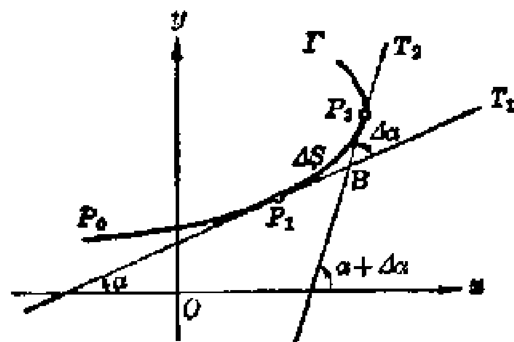


图 6-10

假若有一段曲线 $\Gamma$，它不是圆弧(图 6-10)．从直观上我们觉得它在某一部分弯得重些(例如图 6-10 中 $\Gamma$ 的右上段)，而另一部分弯得轻些(例如图 6-10 中 $\Gamma$ 的左下部)．也就是说，这曲线的弯曲程度随处不同．现在把这现象分析一下：

曲线在一点弯曲的程度，取决于它在这点近旁方向改变得快慢．要说明方向改变得快或慢，必须说明它在多长的弧上方向改变多大角度．曲线在一点的方向决定于切线的斜角，因此首先要假定 $\Gamma$ 处处有切线．

假设动点 $P$ 沿着 $\Gamma$(图 6-10)从一点 $P_0$ 出发，当 $P$ 移动到 $P_1$ 时，$\widehat{P_0P_1}$ 的长是 $s$．这时动点是沿着切线 $P_1T_1$ 的方向移动的．假定 $P_1T_1$ 的斜角是 $\alpha$．如果动点 $P$ 沿着 $\Gamma$ 再移动

一段距离 $\Delta s=\widehat{P_1P_2}$，那么它到 $P_2$ 时是沿着切线 $P_2T_2$ 移动的．假设 $P_2T_2$ 的斜角是 $\alpha+\Delta\alpha$．这就是说 $P$ 点在 $\Delta s$ 这一段弧上方向改变了 $\Delta\alpha(=\angle T_1BT_2)$，那么 $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 便是曲线 $\Gamma$ 在弧 $\widehat{P_1P_2}$ 上方向改变的平均速率，称为弧 $\widehat{P_1P_2}$ 的平均曲率．

**定义 1** 当 $\Delta s\to 0$ 时，$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 的极限叫做曲线 $\Gamma$ 在 $P_1$ 点的曲率．

曲率记作 $K$，即是

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

这就把曲线在 $P_1$ 点的弯曲程度的意义数学化了．

因为 $\Delta s\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，所以

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}\right|=\left|\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right|. \tag{2.5}$$

又因为 $\frac{dy}{dx}=y'=\operatorname{tg}\alpha$，那么 $\alpha=\operatorname{arc\,tg} y'$；于是

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}.$$

前段曾经提到过：$\frac{ds}{dx}=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$，代入(2.5)得

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|. \tag{2.6}$$

如果曲线是由参数方程

$$x=\psi(t),\quad y=\varphi(t)$$

确定的，那么

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi'(t)\varphi''(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^2}$$

代入(2.6)，化简后得

$$K=\left|\frac{\psi'(t)\varphi''(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'^2(t)+\varphi'^2(t)]^{3/2}}\right|,$$

或简写为

$$K=\left|\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|. \tag{2.7}$$

**定理 1** 圆上各点的曲率是常数，等于半径的倒数.

【证】 可以从平面几何直接证明，也可以从解析几何证明.

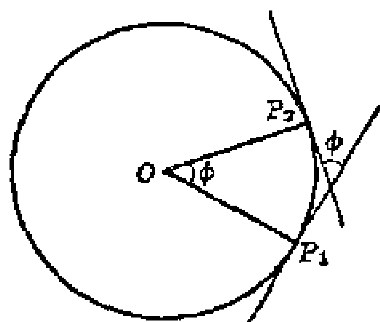


图 6-11

设圆的半径是 $R$，从图 6-11 看，$\widehat{P_1P_2}$ 的平均曲率 $=\frac{\varphi}{\widehat{P_1P_2}}=\frac{\varphi}{R\varphi}=\frac{1}{R}$. 这是与 $\Delta s$ 无关的常数，是 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 的极限.

如果用公式(2.6)证. 就需要从圆的方程

$$x^2+y^2=R^2$$

求 $y$ 对于 $x$ 的一、二阶导数,

$$y'=-\frac{x}{y},\ \ y''=-\frac{R^2}{y^3}.$$

代入 (2.6) 得 $K=\frac{1}{R}$. 】

**定理 2** 直线的曲率是零.

【证】 直线 $y=ax+b$ 的 $y''=0$，所以 $K=0$. 】

【例 1】 在抛物线 $y^2=2px$ 的任一点 $P(x, y)$ 求曲率.

解：$y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p^2}{y^3}$. 代入(2.6)得

$$K=\left|\frac{-p^2}{y^3}\Big/\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right|=\frac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{(2x+p)^{3/2}}.$$

【例 2】 求曲线

$$x=3t^2,\quad y=3t-t^3 \tag{2.8}$$

在 $t=1$ 时的曲率.

解：$x'=6t$, $x''=6$; $y'=3-3t^2$, $y''=-6t$. 当 $t=1$ 时，$x'=6$, $x''=6$; $y'=0$, $y''=-6$. 代入(2.7)得

$$K=\left|\frac{6\cdot(-6)-0\cdot 6}{(6^2+0^2)^{3/2}}\right|=\frac{6^2}{6^3}=\frac{1}{6}.$$

这是曲线在 $P(3,\ 2)$ 点的曲率(图 6–12).

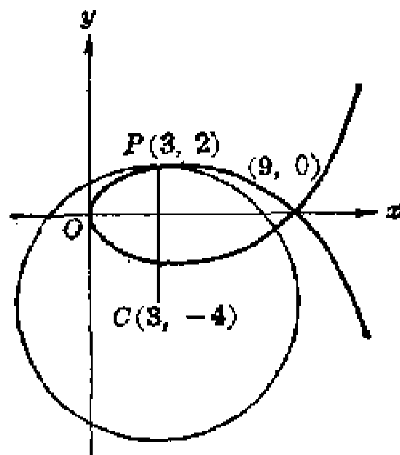



图 6–12

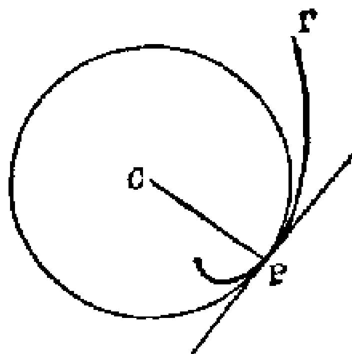



图 6–13

## 2.3 曲率半径、曲率圆、曲率心

由前段两条定理来看．除去直线以外．圆的曲率最简单，圆的半径长等于曲率的倒数．假若已经求得了曲线 $\Gamma$ 在一点 $P$ 的曲率 $K$，只要 $K\neq 0$，便可以取 $\frac{1}{K}$ 为半径画一个圆；那么这圆的弯曲程度正好是 $\Gamma$ 在 $P$ 点的弯曲程度．这样的圆可以使 $P$ 点的弯曲程度形象化．通常把这圆画在 $\Gamma$ 凹的一方(由 $y''$ 的正负判定)并且和 $\Gamma$ 在 $P$ 点相切，在过 $P$ 点的法线(图 6–13)上取 $PC=\frac{1}{K}$. 以 $C$ 为圆心，$CP$ 为半径

画圆. 这圆叫做曲线在 $P$ 点的曲率圆. $C$ 叫做曲率心. 半径 $CP$ 叫做曲率半径. 通常用 $R$ 表示曲率半径, 于是由(2.6)与(2.7)得

$$R=\frac{1}{K}=\left|\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}\Big/\frac{d^2y}{dx^2}\right|=\left|\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}\right|.$$

图 6-12 里的圆 $C$, 是曲线(2.8)在 $P(3, 2)$ 点的曲率圆, $P$ 点的纵坐标是极大, 法线 $PC$ 平行于 $y$ 轴, $PC=6$ 是曲率半径, $(3, -4)$ 是曲率心.

曲率半径或曲率的实用价值很大. 假设有一段直的铁路连接一段圆的铁路, 虽然这地方的轨道是光滑的曲线, 但是火车经过接合的地方还要发生振荡. 原因就是由于曲率在这里突然改变了. 为了避免这种现象, 可以在直线轨道与圆弧轨道之间, 添一段立方抛物线形的轨道, 使立方抛物线的拐点与直线接合, 要求另一端的曲率半径与圆弧的半径相等.

## 习 题 二

1. 对于下列曲线在指定的点上求曲率半径, 再画这曲线和这点的曲率圆:

   (1) $y=x^3$, $(1, 1)$; (2) $y^2=x^3$, $(4, 8)$;

   (3) $x^2-4y^2=12$, $(4, 1)$; (4) $y^2=10x-6$, $(1, 2)$;

   (5) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $(a, 0)$; (6) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $(0, b)$;

   (7) $y=\ln x$, $(e, 1)$; (8) $y^2=x^3+8$, $(-2, 0)$.

2. 对于下列曲线在泛定的点 $(x_1, y_1)$ 上求曲率半径.

   (1) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$; (2) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$;

   (3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; (4) $y=\ln\sec x$.

3. 切抛物线 $y^2=16x$ 于 $(1, 4)$ 的直线, 沿着曲线移动一段距离 $\Delta s=0.1$. 问切线方向转了多大的角(近似值)?

4. 对于下列曲线在指定的点上求曲率半径，再画这曲线和这点的曲率圆。

(1) $x=3t^2, y=3t-t^3, t=1$;　　(2) $x=4\sin t, y=2\cos t, x=2$.

5. 试证曲线 $y=f(x)$ 在曲率半径极小的点上满足

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

6. 试证直线 $x=c$ 的曲率是零。

## 第三节　方程的近似解法

读者在初等数学里学过一些解方程的方法，但是那时候主要是解代数方程，至于象

$$\sin x-x=0$$

这样的所谓*超越方程*如何求解？在一般初等数学里提得很少，超越方程的应用价值并不亚于代数方程，所以学习这种方程的解法是很有必要的．这种方程一般不能求得根的准确值，只能求到它的近似值．求近似根的方法叫做近似解法．这一节中将介绍两种常用的近似解法．

即便代数方程的实根也未必能用根式写出来，遇到这种情况，也只好求近似根，所以近似解法对于代数方程也有讨论的必要．我国宋朝（十三世纪）的数学家如贾宪、秦九韶在这方面有很好的成就．他们所用的方法与西欧盛传的赫乃尔(W. G. Horner)方法完全相同．因为这种方法比较麻烦，近来不大注意它了．这里只讲与导数有关的解法．在讲这方法之前，略谈一下方程的重根．

### 3.1　方程的重根

如果方程

$$f(x)=0 \tag{3.1}$$

有 $k$ 个根都等于 $x_0$，就说 $x_0$ 是(3.1)的 $k$ 重根．若 $k=1$，就说 $x_0$ 是单根．比如方程

$$(x-2)^3(x-5)=0$$

有一个三重根 2 和一个单根 5.

由代数学知道，(3.1) 有 $k$ 重根 $x_0$ 时，$f(x)$ 可以化作 $(x-x_0)^k f_1(x)$ 的形状，而 $f_1(x_0)\neq 0$．换句话说，$f(x)$ 能被 $(x-x_0)^k$ 整除，而不能被 $(x-x_0)^{k+1}$ 整除．显然反过来说也对．

检查 (3.1) 式有无 $k$ 重根 $x_0$，或者 $f(x)$ 能否写成 $(x-x_0)^k f_1(x)$ 的形式，用导数很方便．假设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域里有 $n+1$ 阶导数．根据泰勒公式(第五章§3.3)，在 $k\leqslant n$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{3.2}$$

其中 $\xi$ 在 $x_0$ 与 $x$ 之间．从这等式来看，

$x_0$ 是(3.1)的单根 $\Leftrightarrow f(x_0)=0,\ f'(x_0)\neq 0$.

$x_0$ 是(3.1)的二重根 $\Leftrightarrow f(x_0)=f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$.

如此类推，直到

$$x_0\text{ 是(3.1)的 }k\text{ 重根}\Leftrightarrow\begin{cases}f^{(i)}(x_0)=0 & (i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1);\\ f^{(k)}(x_0)\neq 0.\end{cases}$$

【例】 方程 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4=0$ 由于 $f(2)=f'(2)=0, f''(2)\neq 0$，因而有二重根 $x=2$．由于 $f(1)=0, f'(1)\neq 0$，因而有单根 $x=1$.

如果 $f(x)=0$ 有 $k$ 重根 $x_0$，那么 $x-x_0$ 是 $f(x)$ 及 $f^{(k-1)}(x)$

的公因式，便可以从 $f(x)$ 与它的各阶导数的公因式里去找，所以我们要讲的解法只限于单根.

不论用哪种方法求近似根，首先要推测所求的单根 $x_0$ 在某个确定的区间 $(a, b)$ 之内，而且要 $(a, b)$ 很短，短到它里边只有 $x_0$ 一个根. 当做到这一步之后，就说将单根 $x_0$ **孤立**在 $(a, b)$ 之内了. 要想达到这目的，需要 $f(x)$，$f'(x)$ 及 $a$、$b$ 两个数满足下列条件：

(1) $f(x)$，$f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变符号；

(2) $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反；

为了保证要讲的解法确实能用，再加一条限制：

(3) $f''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，而且不变号. 只要 $f''(x)$ 连续而且 $x_0$ 是单根，这样的 $a$, $b$ 总是存在的.

## 3.2 切线法

按上面 (1)、(2)、(3) 条将 $f(x)=0$ 的单根 $x_0$ 孤立在 $[a, b]$ 之内以后，$a$、$b$ 两数已经可以说是 $x_0$ 的近似值了；$a$ 是弱近似值，$b$ 是强近似值，最大误差不超过 $b-a$. 但是这近似值可能误差太大，不合要求. 现在需要在既有的基础上，设法另求更好的近似值. 大约在 1676 年之前，牛顿取曲线 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 一端的切线代替曲线，然后用切线与 $x$ 轴的交点的横坐标作为根的近似值，这就是切线法，也叫做牛顿法. 虽然当初牛顿是用这方法解代数方程的，其实也可以用来解超越方程.

在孤立 $x_0$ 的区间 $[a, b]$ 上，$y=f(x)$ 的曲线因 $f'(x)$ 的正负而或升或降，又因 $f''(x)$ 的正负而有凹有凸，配合起来一共有图 6-14 到图 6-17 的四种情形. $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反，它

们必然有一个与 $f''(x)$ 符号相同．图 6-14 与图 6-17 中 $f(b)$ 与 $f''(x)$ 同号，便取 $N(b, f(b))$ 点的切线代替曲线．图 6-15 与图 6-16 中 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号，便取 $M(a, f(a))$ 点的切线代替曲线．这样，切线与 $x$ 轴的交点 $x_1$ 一定比 $b$ 或 $a$ 更近于 $x_0$.

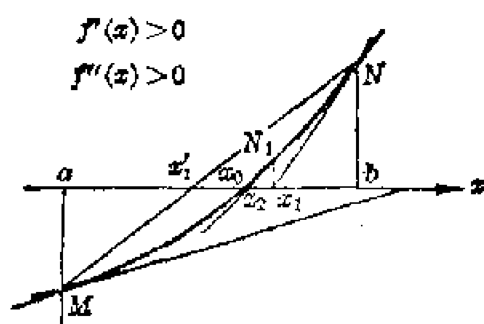



图 6-14

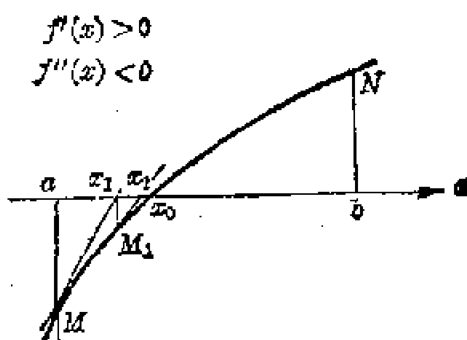



图 6-15

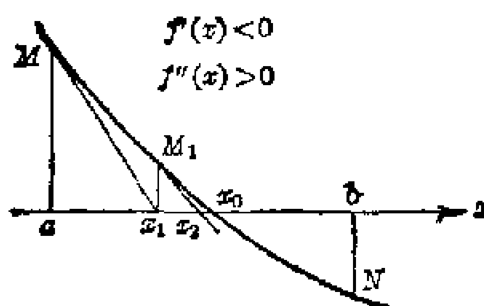



图 6-16

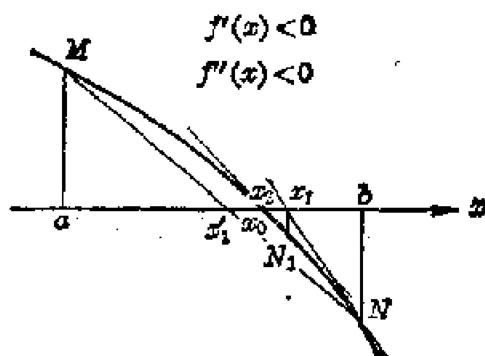



图 6-17

如果不按以上的方法取切线，切线与 $x$ 轴的交点便可能在 $[a, b]$ 之外（图 6-14）．如果 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 的某点等于零，曲线在这点有拐点，可能 $M$、$N$ 两点的切线都与 $x$ 轴交于 $[a, b]$ 之外（图 6-18）．这两种情形的结果都与我们的希望相反．这一切都可以证明，但是这

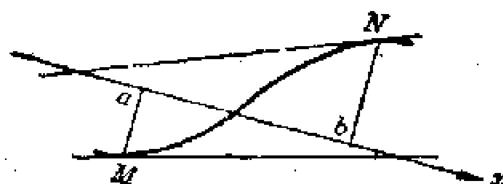


图 6-18

里不能讲那么多，所以从略．上段的第三条要求，就在这里起作用．

假如以 $M(a, f(a))$ 为切点，切线方程便是

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

令 $y=0$，解得

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

这就是比第一近似值 $a$ 好些的第二近似值．假若认为 $x_1$ 的精密度还不够，可以令 $x_1=a_1$，照上边那样在 $M_1(a_1, f(a_1))$ 点作切线，用它代替曲线，又求得第三近似值

$$x_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

这方法可以继续进行任意多次．这说明 $a$ 点确定后，就有一个收敛于 $x_0$ 的数列

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots, \tag{3.3}$$

这数列里的数一个比一个接近于 $x_0$，因而近似根可以精密到任何程度．

假若最初在 $N(b, f(b))$ 点作切线，同样有一个收敛于 $x_0$ 的数列

$$b,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots, \tag{3.4}$$

同样可以按这数列求得精密到任何程度的近似根．

【例 1】 求方程 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 在区间 $[0, 1]$ 内的根．

解：$f(0)<0$，$f(1)>0$．在区间 $[0, 1]$ 上

$$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0,$$

$$f''(x)=6x+2.2>0.$$

所以应该从 $[0, 1]$ 的右端点起算．用 $a_1$，$a_2$，…表示逐次所求

的近似值，得

$$a_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738,$$

$$a_2=0.738-\frac{f(0.738)}{f'(0.738)}\approx 0.674$$

$$a_3=0.671,$$

............

因为 $f(0.671)>0$, $f(0.670)<0$, 可以断定，根的前两位小数是 0.67.

**附注** 按数列(3.3)求近似根时，末位小数只可抹去，不许凑整．例如打算每次都取三位小数的话，则不管小数的第四位是几，一概舍去．不然的话，可能使近似值大于 $x_0$, 因而使下次求得的值反而更坏．同理用(3.4)计算时，只可凑整，不许抹去．

【例 2】 解方程

$$x^2+\lg x-2=0.$$

**解**：将方程写作

$$\lg x=2-x^2.$$

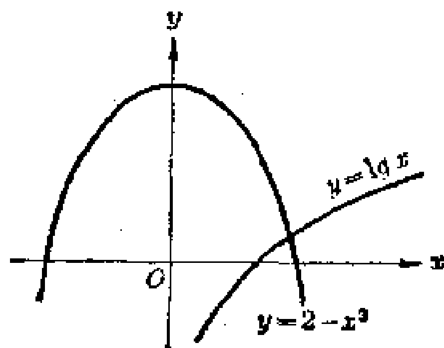


图 6-19

对于同一坐标轴作 $y=\lg x$ 及 $y=2-x^2$ 的曲线．对数曲线在 $x=1$ 时穿过 $x$ 轴，抛物线 $y=2-x^2$ 交 $x$ 轴于 $x=\pm\sqrt{2}$ 两点．两曲线只相交于一点，交点的横坐标在 $x=1$ 与 $x=\sqrt{2}$ 之间(图 6-19)．

令 $f(x)=x^2+\lg x-2$, 则当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 时

$$f'(x)=2x+\frac{0.4343}{x}>0,$$

$$f''(x)=2-\frac{0.4343}{x^2}>0.$$

$y=f(x)$的曲线在$[1, \sqrt{2}]$内凹曲、上升.

$$f(1)=-1<0, \quad f(\sqrt{2})=\lg\sqrt{2}=0.1505>0$$

我们用切线法计算，从$b_0=\sqrt{2}$起算.

$$f(\sqrt{2})=0.1505,$$

$$f'(1.414)=2.828+\frac{0.4343}{1.414}=3.135.$$

$$x_1=1.414-\frac{0.1505}{3.135}=1.414-0.045=1.366.$$

为了继续求近似根，把$x_1$的末位小数6进成前位的1，取$x_1=1.37$.

$$f(x_1)=(1.37)^2+\lg 1.37-2=1.8769-0.1367-2$$
$$=0.0136,$$

$$f'(x_1)=2\times 1.37-\frac{0.4343}{1.37}=2.74-0.3170$$
$$=3.0570.$$

由此

$$x_2=1.37-\frac{0.0136}{3.057}=1.37-0.0044=1.3656.$$

所以$x\approx 1.366$.

### 3.3 弦线法

方程$f(x)=0$的根$x_0$孤立在区间$[a, b]$以后，若是这区间很短，那么曲线上的弧$\overset{\frown}{MN}$便很近于弦$MN$. 所以弦$MN$与$x$轴的交点$x_1'$也是根的近似值. 在图6-14与图6-17的$x_1'$都比$a$更近于$x_0$（这时$f'(x)$与$f''(x)$同号）. 如果是图6-15和图6-16的情形，$x_1'$比$b$更接近于$x_0$（这时$f'(x)$与$f''(x)$反号）. 按同样方法用区间$[x_1', b]$或$[a, x_1']$上的弦代替曲线，又求得第三个近似值$x_2'$. 在$f'(x)$，$f''(x)$同号的情

形，令 $x_1'=a_1$，$x_2'=a_2$，…，也得到一个收敛于 $x_0$ 的上升数列

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

在 $f'(x)$，$f''(x)$ 反号的情形，令 $x_1'=b_1$，$x_2'=b_2$，… 便得到一个收敛于 $x_0$ 的下降数列

$$b,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots.$$

这两个数列的作用和(3.3)，(3.4)相同.

弦 $MN$ 的方程是

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \quad 或 \quad \frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-b}{b-a}.$$

令 $y=0$，便可以解得第二近似根

$$a_1=x_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \tag{3.5}$$

或

$$b_1=x_1=b-f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}. \tag{3.6}$$

把这公式里的 $a$（或 $b$）换作 $x_1$，就又可以得到第三个近似根 $x_2$. 以后的近似根如此类推.

(3.5)与(3.6)是同一个数的两种写法，(3.5)里涉及 $a$ 的数值有四个，涉及 $b$ 的只两个. (3.6)里涉及 $a$ 的只两个，涉及 $b$ 的有四个. 图 6-14 与图 6-17 两种情形，逐次的割线都通过 $N(b,\ f(b))$，这时用公式(3.6)方便. 图 6-15 和图 6-16 的情形用(3.5)方便.

【例】 用弦线法解上段例 1 的方程.

解：这问题属于图 6-14 那种情形，用(3.6)计算. 现在 $a=0$，$b=1$，$f(1)=1.6$，$f(0)=-1.4$. 所以

$$a_1=1-1.6\times\frac{1-0}{1.6-(-1.4)}=\frac{1.4}{3}\approx 0.466.$$

这里写第三位小数 6 时，舍去了第四位的 6，而不是按四舍五入处理，就是怕把第三位进上去以后会使得 $a_1$ 大于所求的真

根，以致发生错误．下边由 $a_1$ 代替 $a$，代入公式(3.6)，得

$$a_2=1-1.6\times\frac{1-0.466}{1.6-f(0.466)}\approx 0.617.$$

用同样方法求得

$$a_3\approx 0.660,\quad a_4\approx 0.663,\quad a_5\approx 0.670,\quad a_6\approx 0.670.$$

$a_5$ 与 $a_6$ 的前三位小数相同，说明这近似根已经很不错了．其实在上段用牛顿法求得的 0.671 是强近似根，若取 0.6705 作为近似根，可以断定误差不大于 0.0005．

## 习 题 三

1. 把一个半径是 2，比重是 $\frac{1}{4}$ 的球放在水里，试证这球入水部分的高度 $x$ 是方程

$$x^3-6x^2+8=0$$

的根．在区间 $0\leqslant x\leqslant 4$ 里作函数 $y=x^3-6x^2+8$ 的图象，然后将 $x=1$ 与 $x=2$ 之间的曲线看作直线，求得这根的第一近似值，然后用切线法求第二近似值．

2. 在半径为 2 的圆里，内接一个面积为 1 的等腰三角形．求这等腰三角形的底边之长．

3. 求方程 $e^{-x}+\frac{1}{2}x-1=0$ 的正数根．先对同一副坐标轴画 $y=e^{-x}$ 及 $y=1-\frac{1}{2}x$ 的图象，用它们的交点估计原方程的根，然后用切线法作一次精密计算．

4. 圆的一条弦把这圆的面积割去四分之一．求这弦所对的圆心角．

# 第四节 导数在物理上的应用

## 4.1 相关变率

如果有一个固定的条件联系着几个变量，这些变量又都

随着时间而变，那么它们的变率之间，必然也有一定的关系．有这种连带关系的变率叫做相关变率，其中一个变率往往能用其他的变率算出来．

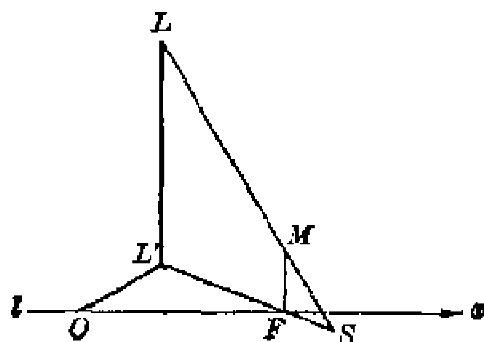


图 6-20

【例 1】 身高 5 尺的人在路灯一旁沿着一条水平直线 $l$ 行走(图 6-20)．电灯杆 $LL'$ 到 $l$ 的距离是 8 尺，杆足 $L'$ 在 $l$ 上的正投影是 $O$．灯高 20 尺，如果人行速度每秒钟 1.5 尺．求当人离 $O$ 点 6 尺时，人影长度的变率．

解：图 6-20 中 $FM$ 是人高，$s=FS$ 是人影．$L$是灯．设 $OF=x$，令 $x$ 向右为正，向左为负．我们已经知道（第一章 §2.8，例 3）

$$s=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+64}.$$

这里 $s$ 和 $x$ 都是时间 $t$ 的函数．把这等式两端同时对 $t$ 求导数

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x}{3\sqrt{x^2+64}}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

已知 $\frac{dx}{dt}=1.5$，所以

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x}{2\sqrt{x^2+64}}.$$

现在人与 $O$ 的距离是 6，那么 $x=\pm 6$，于是

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\pm 6}{2\sqrt{36+64}}=\pm 0.3.$$

这就是说当人在 $O$ 点之右 6 尺远往右走时，人影以每秒 0.3 尺的速率增加．当人在 $O$ 点之左 6 尺远往右走时，人影以每

秒 0.3 尺的速率缩短.

【例 2】 甲船以每小时 24 公里的速度向北行驶. 同时正东 10 公里处有乙船, 以每小时 20 公里的速度向东行驶. 问从这时起经过 1 小时后, 两船间的距离按怎样的速率变化?

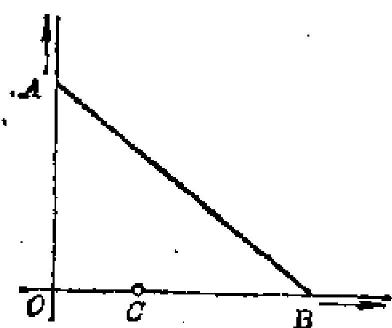


图 6-21

解: 设甲船最初在 $O$ 点 (图 6-21), 乙船在 $C$ 点, $OC=10$. $t$ 小时后, 甲船在 $A$, 乙船在 $B$. 命 $AB=s$, $OA=x$, $CB=y$. 那么

$$s=\sqrt{x^2+(y+10)^2}.$$

$s$, $x$, $y$ 都是 $t$ 的函数. 将这等式两端都对 $t$ 求导数,

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+(y+10)\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+(y+10)^2}}.$$

现在 $\frac{dx}{dt}=24$, $\frac{dy}{dt}=20$. 当 $t=1$ 时, $x=24$, $y=20$. 将这些数据代入上面的等式, 得

$$\frac{ds}{dt}=\frac{24^2+(20+10)\cdot 20}{\sqrt{24^2+(20+10)^2}}=\frac{196}{\sqrt{41}}\approx 30.5.$$

这说明 $t=1$ 时, 两船间距离以每小时 30.5 公里的速度增加.

## 4.2 直线运动

物体作直线运动时, 它的运动方程是

$$s=f(t),$$

其中 $t$ 是运动经过的时间, $s$ 是距离. $s$ 对于 $t$ 的变率是速度

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t).$$

速度对于时间 $t$ 的变率是加速度

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t).$$

速度与加速度都沿着运动路线(直线)度量. $v>0$ 时, 物体向前进, $v<0$ 时物体向后退. 所谓前进与后退决定于预先选定的正方向. 加速度的方向未必与物体运动的方向一致.

【例】 物体按

$$s=2t^3-15t^2+36t+20$$

作直线运动. 分析它什么时间内前进,什么时间内后退?加速度什么时候是正数, 什么时候是负数? 当 $t=2, 2\frac{1}{3}, 3$ 时,物体的运动是逐渐减慢还是加快?

解: 我们规定向右为正,向左为负. 速度是

$$v=6t^2-30t+36=6(t-2)(t-3).$$

$0<t<2$ 时, $v>0$, $s$ 递增,物体向右移动;

$2<t<3$ 时, $v<0$, $s$ 递减,物体向左移动;

$3<t$ 时, $v>0$, $s$ 递增,物体向右移动.

加速度是

$$a=12t-30=6(2t-5).$$

$0<t<\frac{5}{2}$ 时, $a<0$, $v$ 递减;

$\frac{5}{2}<t$ 时, $a>0$, $v$ 递增.

但是应该注意,这里所谓速度的增减是从代数值说的,从绝对值说就需要进一步分析. 例如

$0<t<2$ 时, $v$ 从 36 下降到 0, 是递减.

$2<t<\frac{5}{2}$时，$v$ 从 0 下降到 $-\frac{3}{2}$，$v<0$，物体向左移动．论绝对速度是增加，从 0 增加到 $\frac{3}{2}$．

$\frac{5}{2}<t<3$ 时，$v$ 从 $-\frac{3}{2}$ 上升到 $0$，$v<0$．物体继续往左移动，但是越来越慢，论绝对速度是减小．

$3<t$ 时，$v>0$，$a>0$，物体往右移动，加快．

$t=2$ 时，$v=0$，$v$ 由正变负．从代数上说是逐渐减慢，按绝对值说是物体由前进转为后退．

$t=2\frac{1}{3}$时，$v=-\frac{4}{3}$，$a<0$，$v$ 下降．物体向左移动，加快．

$t=3$ 时，$v=0$，由负变正．从代数上说是加快．按绝对值说是物体由后退转为前进．

建议读者仿照讨论曲线的方法，将 $v$，$a$ 的正负情形列成一个表，然后分析物体的进退和快慢．

## 4.3 平面曲线运动

运动方程

$$s=f(t)$$

只能表示直线运动，它在 $ts$ 坐标平面上的图象并不是物体运动的路线．物理中表示曲线运动一般用参数方程：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{4.1}$$

这里参数 $t$ 代表时间．如果 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都连续，那么当 $t$ 连续变化时，$P(x, y)$ 便描出一条连续曲线．这就是物体运动的路线．(4.1)叫做运动方程．

动点 $P(x, y)$ 按照(4.1)作曲线运动时，它的速度既有方向又有大小．这样带有方向的量叫做矢量或向量．一般矢量用 $\boldsymbol{a}$ 表示．速度时常用 $\boldsymbol{v}$ 表示，而 $\boldsymbol{v}$ 的长度(大小)用 $v$ 表示．

其实 $v$ 就是速率(撇开方向的速度). 长度是 2、斜角是 $\frac{\pi}{6}$ 的速度 $\boldsymbol{v}$, 就按斜角的方向画一个长度为 2 的箭头来表示它(图 6-22). 它的起点 $P$ 可以按问题的方便选取. 为了便于进行计算,时常把它拆成两个分量,一个是 $\boldsymbol{v}$ 的水平投影 $\boldsymbol{v}_x$; 一个是 $\boldsymbol{v}$ 的铅直投影 $\boldsymbol{v}_y$. 比如图 6-22 里 $\boldsymbol{v}$ 的分量是

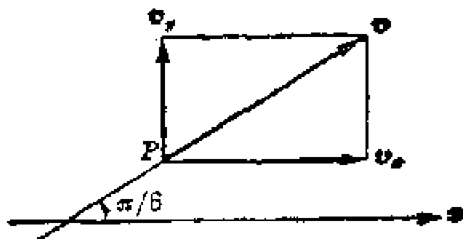



图 6-22

$$\boldsymbol{v}_x=2\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \boldsymbol{v}_y=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

显然 $\boldsymbol{v}$ 的长度是 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, 而且 $\boldsymbol{v}$ 的斜角 $\theta$ 取决于 $\operatorname{tg}\theta=v_y/v_x$.

一般地说分量不限定要平行于坐标轴, 也不一定互相垂直. 目前我们用到的只是互相垂直的情形, 但是两个分量可能不与两坐标轴平行.

动点 $P(x, y)$ 沿着曲线(4.1)移动时, 它的速度 $\boldsymbol{v}$ 取决于它的两个分量

$$\boldsymbol{v}_x=\frac{dx}{dt}=\varphi'(t),\ \boldsymbol{v}_y=\frac{dy}{dt}=\psi'(t).$$

用曲线上的 $P(x, y)$ 点作起点, 画出 $\boldsymbol{v}_x$ 和 $\boldsymbol{v}_y$(图 6-23), 再用 $\boldsymbol{v}_x$、$\boldsymbol{v}_y$ 作边, 完成一个长方形; 那么这长方形里从 $P$ 点出发的对角线即是速度 $\boldsymbol{v}$. 从第四章 § 4.4 参数方程的导数知道: $\boldsymbol{v}$ 必定在 $P$ 点处的切线上.

从本章 § 2.1 的(2.3)式 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ 知道:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}=v.$$

所以 $v$ 是曲线的弧长对于时间 $t$ 的导数. 这恰好说明 $v$ 是曲

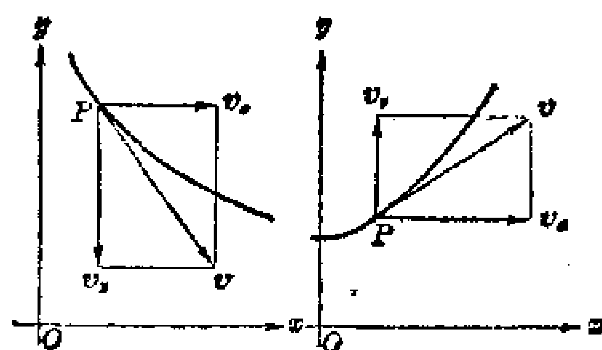


图 6-23

线运动的速率.

曲线运动的加速度 $\boldsymbol{a}$, 也可仿照速度那样分解成水平与铅直的两个分量

$$\boldsymbol{a}_x=\frac{dv_x}{dt}=\varphi''(t),\ \boldsymbol{a}_y=\frac{dv_y}{dt}=\psi''(t).$$

也是以 $P$ 为起点. 先画 $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, 然后作成一个长方形, 其中从 $P$ 出发的对角线便是 $\boldsymbol{a}$.

物理中还时常使用加速度的切线分量 $\boldsymbol{a}_t$ 和法线分量 $\boldsymbol{a}_n$, 即 $\boldsymbol{a}$ 沿着切线和法线方向分解的分量. 计算它们的公式是

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{dv}{dt},\ \ \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{R}.$$

这里 $R$ 是曲线在 $P$ 点的曲率半径; $\boldsymbol{a}_n$ 永远指向曲线的凹侧.

【例 1】 略去空气阻力不计, 炮弹的运动方程是

$$x=v_1t\cos\varphi,\quad y=v_1t\sin\varphi-4.9t^2.$$

其中 $v_1$ 是初速度, $\varphi$ 是发射角, $t$ 是时间(以秒为单位), $x$、$y$ 以米为单位.

(1) 求任意时刻 $t$ 上的速度分量、速度; 加速度分量、加速度.

(2) 设 $v_1=100$ 米/秒, $\varphi=30°$; 求第一秒之末炮弹的运动方向.

解：(1) $v_x=v_1\cos\varphi$, $v_y=v_1\sin\varphi-9.8t$.

$$v=\sqrt{v_1^2-19.6v_1t\sin\varphi+96.04t^2},$$

$$a_x=0,\ a_y=-9.8,\ a=9.8\ \text{向下}.$$

(2) 以 $t=1$, $v_1=100$, $\varphi=30°$ 代入，得

$v_x=86.6$ 米/秒，$v_y=40.2$ 米/秒，$v=95.5$ 米/秒.

$v$ 的斜角 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{40.2}{86.6}=\operatorname{arc\,tg}0.4642=24°54'$.

【例 2】 已知运动方程

$$x=t^2,\quad y=4t-t^3. \tag{4.2}$$

(1) 求 $x$、$y$ 的直接方程. (2) 画出 $t=1$ 及 $t=\sqrt{3}$ 时的速度和加速度. (3) $t$ 等于什么数时速率最小？最大？(4) 在哪一点上加速度最小？

解：(1) 由 (4.2) 消去 $t$，得 $x$、$y$ 的直接方程(图 6-24)

$$y^2=x(4-x)^2.$$

(2) $v_x=2t$, $v_y=4-3t^2$.

$$v=\sqrt{16-20t^2+9t^4}.$$

被开方式恒为正值.

$$a_x=2,\ a_y=-6t,$$

$$a=2\sqrt{1+9t^2}.$$

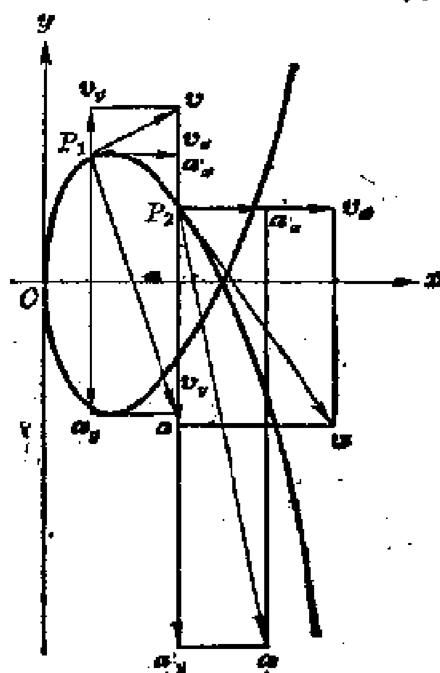


图 6-24

当 $t=1$ 时，曲线上的点是 $P_1(1,3)$, $v_x=2$, $v_y=1$, $v=\sqrt{5}$; $a_x=2$, $a_y=-6$, $a=2\sqrt{10}$.

当 $t=\sqrt{3}$ 时，曲线上的点是 $P_2(3,\sqrt{3})$, $v_x=2\sqrt{3}$, $v_y=-5$, $v=\sqrt{37}$; $a_x=2$, $a_y=-6\sqrt{3}$, $a=4\sqrt{7}$.

(3) $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{4t(9t^2-10)}{\sqrt{16-20t^2+9t^4}}$. 由此求得临界点 $t=0$ 及

$\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$. $t=0$ 时 $v=4$ 极大. $t=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时 $v=\sqrt{4.9}$ 极小.

(4) 从 $a=2\sqrt{1+9t^2}$ 直接看到 $t=0$ 的 $a=2$ 最小.

【例 3】 由旋轮线方程

$$x=2(\pi t-\sin\pi t),\ y=2(1-\cos\pi t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2).$$

求 $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_t$.

解: $\frac{dx}{dt}=2(\pi-\pi\cos\pi t)$, $\quad \frac{dy}{dt}=2\pi\sin\pi t$.

$$\boldsymbol{a}_x=\frac{d^2x}{dt^2}=2\pi^2\sin\pi t,\qquad \boldsymbol{a}_y=\frac{d^2y}{dt^2}=2\pi^2\cos\pi t.$$

为了求 $\boldsymbol{a}_t$, 先求 $v$:

$$v^2=v_x^2+v_y^2=4\pi^2(1-\cos\pi t)^2+4\pi^2\sin^2\pi t$$

$$=4\pi^2(2-2\cos\pi t)=16\pi^2\sin^2\frac{\pi t}{2}.$$

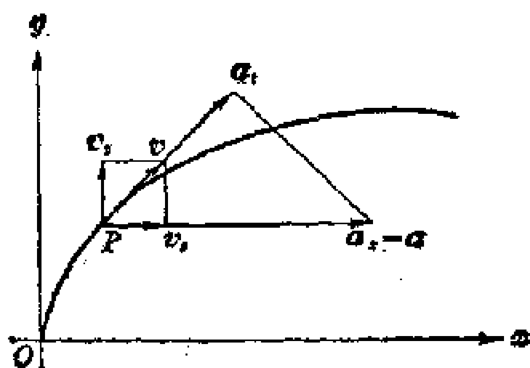



图 6-25

由此

$$v=4\pi\sin\frac{\pi t}{2}$$

因而

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{dv}{dt}=2\pi^2\cos\frac{\pi t}{2}.$$

图 6-25 画的是 $t=\frac{1}{2}$ 时的 $\boldsymbol{a}_x=2\pi^2$, $\boldsymbol{a}_y=0$, $\boldsymbol{a}_t=\pi^2\sqrt{2}$. 这时的动点在 $P(\pi-2,\ 2)$.

## 习 题 四

1. 有一民警骑着脚踏摩托车以每秒 $\frac{40}{3}$ 米的速度驶向一个十字路口. 当他离路口 $41\frac{2}{3}$ 米时, 一辆汽车以每秒 10 米的速度横越十字路口(垂直于民警的路线). 民警立即把反光灯瞄准这汽车. 问

两秒钟后，这反光灯的旋转速度多大？

2. 从高处喷口向地上漏沙土时，地上形成的沙堆总是正圆锥形，它的高永远是底直径的一半．如果沙土以每秒 6 立方尺的速度从喷口漏下，问当地上沙堆高为 5 尺时，高的增长速度多大？

3. 有 10 公分长的线段 $AB$，下端 $A$ 在 $x$ 轴上，上端 $B$ 在 $y$ 轴上．如果 $A$ 离原点 8 公分远时，以每秒 2 公分的速度远离原点．问这时

   (1) $B$ 点按什么速度下降？

   (2) $AB$ 与两轴所围的面积如何变化？

   (3) $AB$ 的中点 $M$ 到 $O$ 的距离如何变化？

4. 灯塔的灯放射一条光线，这灯每分钟旋转两周，光线随着旋转．灯塔在一条直海岸之内一公里，$F$ 是海岸上距灯塔最近的点．光线与海岸交于 $P$ 点．问 $FP$ 等于 2 公里时，$P$ 点移动的速度是多少？

5. 曲柄连杆的曲柄长为 $a$ 公尺，连杆长为 $b$ 公尺，如果曲柄每秒钟转 2 周．问滑块运动的线速度是多少？

6. 从 15 米高的房顶以每秒 10 米的速度向上抛出一个球．求 $t$ 秒后从地面到球的距离；并问这球最高离地面多远？

7. 试证形式为 $s=a+bt+ct^2$ 的直线运动方程一定表示等加速度运动．再用函数与导数的关系证明这命题的逆命题．

8. 一辆汽车以 12 米/秒的速度在水平马路上行驶时，突然刹车．如果阻止车前进的摩擦力是 0.64 米/秒$^2$，问车滑行多久？滑行多远？

9. 物体按照 $s=t^3-9t^2+15t$ 作直线运动，分析这运动的情况（包括物体运动的方向，速度的增减，加速度的正负以及它们之间的关系）．

10. 如果物体运动的路线是 $y=f(x)$ 的图象．问它的运动方程是什么？分析它的速度矢量与加速度矢量．

11. 从下列曲线运动的方程，求在指定时刻 $t_0$ 上的 $\boldsymbol{v}_x$, $\boldsymbol{v}_y$, $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}$ 的点的位置，运动的方向，并且求曲线的 $x$、$y$ 直接方程．

    (1) $x=t,\ y=t^3,\ t_0=2$;　　(2) $x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=3$;

    (3) $x=\sin t,\ y=\cos 2t,\ t_0=\dfrac{\pi}{4}$;　(4) $x=2t,\ y=t^2+3,\ t_0=0$.

12. 作运动方程 $x=e^t$, $y=e^{-t}$ 的曲线．求 $\boldsymbol{v}_x$, $\boldsymbol{v}_y$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_t$, $\boldsymbol{a}_n$ 及速率最小时的点．

## 第六章小结

这章的内容，实际是第四、第五两章理论的应用.

要认识一个函数，一方面要从整体上去认识它，第五章最后一节函数的讨论属于这一方面；另一方面是从局部上、细节上去认识它，在一点的升降、近似值、微分属于这一方面. 当然这两方面并不是各自孤立的. 有了导数才有泰勒公式，才能更好地求近似值或增量，比单纯用一阶微分的效果好得多. 有了函数的总体认识，就能整体地观察导数的正负和微分的正负.

本章第一节实际是第五章最后一节的继续，是从整体上、几何上认识函数. 但是这些认识非借助于导数不可，所以才把它归于导数的应用.

第二节为了讲曲率，先引进弧长的导数公式：

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{1}$$

虽说这是导数，而产生这导数的根源是

$$PP'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}. \tag{2}$$

发展下去，结果是

$$ds^2=dx^2+dy^2. \tag{3}$$

所以这里引用的知识实际是微分. 思路上最好从(2)发展为(3)，然后变形为(1). 至于曲率的意义和计算它的公式都不是艰深的问题. 曲率圆的作用已经在本章之初的前言里讨论了.

或许有人说，有了电子计算机，方程的近似解法还有讲的必要吗？我们说，用手计算诚然不及电子计算机快，但是计算

机还需要人去安排. 尽管不必要我们动手计算，然而其中推理过程还是需要了解的，所以仍旧写了第三节.

第四节实际上仅仅是导数的应用. 相关变率是交结在一起的几个函数同时变化的时候，几个变率之间的关系. 举的例题都以时间为基本变量，这是为了直观. 实际上，一般问题未必都以时间为转移，希望读者注意. 曲线运动是这节的中心问题，也附带讲了点矢量的概念. 因为这在解析几何里已有详尽的介绍，这里只把用到的一点知识提了一下，有了坐标的概念，是很容易理解这些内容的.

# 习题答案

## 第一章

习题一 2. $\dfrac{(n+1)a+kb}{n+1+k}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$.

4. $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{7}{6}$, $\dfrac{2}{15}$, $\dfrac{2}{9}$.

5. $x-2$ 与 $a$ 同号时 $x>2+\dfrac{1}{a}$; $x-2$ 与 $a$ 反号时, $x<2+\dfrac{1}{a}$.

6. (1) $\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\pi\leqslant x\leqslant\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\geqslant x\geqslant 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $-\infty<x<-3$, $1<x<4$.

7. (1) $-1\leqslant x<2$; (2) 无解.

8. (1) $-1.01<x<-0.99$; (2) $x<-\dfrac{1}{2}$;

(3) $0<x<\dfrac{2}{3}$; (4) $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$;

(5) $\dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10}$ 及 $\dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10}$;

(6) $x<-2$, $-1<x<0$, $1<x$.

9. $x<\dfrac{1}{2}$ 及 $x>\dfrac{3}{2}$. 10. $2<x<3$. 11. 小于 $|h|$.

12. $N(0, 10000)$, $N(0, \sqrt{\delta})$. 13. $N\left(0, \dfrac{1}{10^{100}}\right)$.

习题二 4. $f(0)=-\dfrac{3}{2}$, $f(1)=-\dfrac{2}{3}$, $f(3)=0$, $f(-3)=6$,

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{3}$, $f(\sqrt{3})=5\sqrt{3}-9$, $f(2a)=(2a-3)/(2+2a)$.

5. $\varphi(1)=0$, $\varphi(a)=a^3-1$, $\varphi(a+1)=a^3+3a^2+3a$,
$\varphi(a-1)=a^3-3a^2+3a-2$.

6. $F(0)=3$, $F(1)=1$, $F(2)=\frac{1}{3}$, $F(-1)=9$, $F(2.5)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

7. (1) $x_1=0$, $x_2=2$; (2) $x_1=-1$, $x_2=3$.

8. 23. 12. $x\leqslant -5$, $x\geqslant 7$. 13. (1) $x=-2$ 及 $x\geqslant 0$; (2) $x<-2$.

15. $f(x)=2x-(2n+1)$, $n\leqslant x<n+1$.

**习题三** 1. (1) $[1, \infty)$; (2) $(-\infty, +\infty)$; (3) $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$;

(4) $x$ 是不等于 $-1$ 的一切实数; (5) $(1, +\infty)$; (6) $-1\leqslant x\leqslant 2$;

(7) $[-2, 2]$; (8) $(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$; (9) $[-1, 1]$;

(10) $(2, +\infty)$; (11) $(2, 3)$; (12) $(-\infty, 0), (0, +\infty)$;

(13) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$($k$ 为任意整数); (14) $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$.

9. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $f(\sqrt{10})=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $f\left(\frac{110}{3}\right)=\frac{110}{111}$.

**习题四** 1. $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma(0, \pi)$.

2. $V=\pi a^2x$, 定义域为 $(0, h]$, 值域为 $(0, \pi a^2h]$; $x=\frac{kt}{\pi a^2}$, 定义域为 $\left(0, \frac{\pi a^2h}{k}\right]$; 值域为 $(0, h]$.

3. $F=k(2l-x)$, $l\leqslant x\leqslant 2l$; $F=2(20-x)$, $10\leqslant x\leqslant 20$.

4. $$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10;\\ -\frac{3}{2}t+30, & 10<t\leqslant 20.\end{cases}$$

5. $J=\frac{ch}{(h^2+a^2)^{3/2}}$, $0<h<+\infty$.

6. $y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2}$, $0\leqslant x\leqslant d$.

7. $A=b\sqrt{900-b^2}$, $0<b<30$.

8. $S=\frac{5}{3}(6-h)h$, $0<h<6$; $S=\frac{60}{7}OE\left(1-\frac{1}{7}OE\right)$, $0<OE<7$.

9. $h=\sqrt[3]{\frac{72t}{\pi}}$, $0\leqslant t\leqslant\frac{125\pi}{9}$.

10. $OB=2\sqrt{25-t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 5$. $\triangle OAB$ 的面积 $=2t\sqrt{25-t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 5$.

11. $y=\pm 2\sqrt{pt}$, $t\geqslant 0$; $y=\pm\sqrt{2p(2t+5)}$, $t\geqslant -\frac{5}{2}$. 设 $Q$ 点的坐标为 $(x_1, y_1)$.

(1) $x_1=\frac{2rt}{1+r}$, $y_1=\frac{\pm 2r\sqrt{pt}}{1+r}$, $t\geqslant 0$;

(2) $x_1=\frac{r(2t+5)}{1+r}$, $y_1=\frac{\pm r\sqrt{2p(2t+5)}}{1+r}$, $t\geqslant -\frac{5}{2}$.

习题五 1. (1)、(4)是奇函数; (2)、(6)是偶函数.

6. 在区间 $(-\infty, -1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内, 函数既不上升又不下降. 在区间 $[-1, 0]$ 内函数下降. 在区间 $[0, 1]$ 内函数上升. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)>0$.

7. (1) $\pi$; (2) 不是; (3) $2\pi$; (4) 不是; (5) $\pi$; (6) 2; (7) $2\pi$.

习题六 1. $y=\frac{1}{2}(x+3)$, $-1\leqslant x\leqslant 7$.

2. (1) $x=\frac{V}{\pi a^2}$, $(0, \pi a^2 h]$. $t=\frac{\pi a^2}{k}x$, $(0, h]$;

(2) $t=\frac{\pi h^3}{72}$, $[0, 10]$.

3. $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$, $a+d=0$.

4. $y=x^2-x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $-\frac{3}{4}\leqslant y<+\infty$.

$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 值域是 $0\leqslant y<+\infty$.

6. $\frac{9}{16}$. 7. $t^2 f(x, y)$.

习题七 4. $\log_{(abc)}x=\frac{\log_a x\cdot\log_b x\cdot\log_c x}{\log_b x\cdot\log_c x+\log_c x\cdot\log_a x+\log_a x\cdot\log_b x}$.

习题八 2. (1) $\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;

(2) $\frac{k\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; (3) 无解;

(4) $\frac{k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

5. $\frac{35}{128}\pm\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{7}{32}\cos 4x\pm\frac{1}{4}\cos^3 2x+\frac{1}{128}\cos 8x$.